PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

Los métodos para determinar los máximos y mínimos de las funciones se pueden aplicar a la solución de problemas prácticos, para resolverlos tenemos que transformar sus enunciados en fórmulas, funciones o ecuaciones.

Debido a que hay múltiples tipos de ejercicios no hay una regla única para sus soluciones, sin embargo puede desarrollarse una estrategia general para abordarlos, la siguiente es de mucha utilidad.

ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS APLICADOS A LA OPTIMIZACIÓN.

- **a)** Identificar los hechos dados y las cantidades desconocidas que se tratan de encontrar.
- **b)** Realizar un croquis o diagrama que incluya los datos pertinentes introduciendo variables para las cantidades desconocidas.
- **c)** Enunciar los hechos conocidos y las relaciones entre las variables.
- **d)** Determinar de cuál de las variables se desea encontrar el máximo o el mínimo y expresa resta variable como función de una de las otras variables.
- **e)** Encontrar los valores críticos de la función obtenida.
- **f)** Utilizar el criterio de la primera o de la segunda derivada para determinar si esos valores críticos son máximos o mínimos.
- **g)** Verificar si hay máximos o mínimos en la frontera del dominio de la función que se obtuvo anteriormente.
- **h)** **MUCHA DEDICACIÓN Y PRÁCTICA.**

1.) Hallar dos números cuya suma es 18, sabiendo que el producto de uno por el cuadrado el otro es máximo.

Según el enunciado $x + y = 18 \quad y \quad x \cdot y^2 = Máximo$

Despejemos una en la primera ecuación y su valor lo llevamos a la ecuación del máximo.

$y = 18 - x \; ; \quad Máximo = x(18-x)^2 \quad \Rightarrow M(x) = x(18-x)^2$, En esta ecuación hallamos el valor de x que la hace máxima.

A.- Hallar la primera derivada, se iguala a cero y se resolve la ecuación resultante.

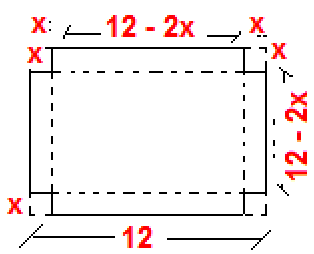
damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

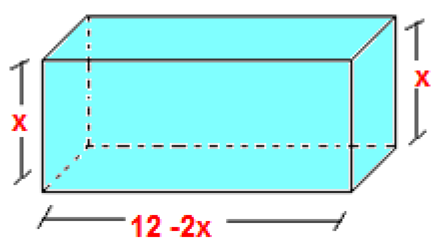
$$M'(x) = (18-x)^2 - 2x(18-x) \Rightarrow M'(x) = 3(x-18)(x-6)$$
$$si: M'(x) = 0 \Rightarrow -3(18-x)(x-6) = 0 \Rightarrow x_1 = 18; x_2 = 6(v.c.)$$

B.- Calculamos la segunda derivada y hallamos su valor numérico para las raíces anteriores.

$$M''(x) = 6(x-12) \Rightarrow M''(6) = -36 < 0 \Rightarrow \exists\ máximo; M''(18) = 36 > 0\ \exists\ mínimo$$
$$si\ \ x = 6 \Rightarrow y = 12$$

2) Se dispone de una lámina de cartón cuadrada de 12 cm. de lado. Cortando cuadrados iguales en las esquinas se construye una caja abierta doblando los laterales. Hallar las dimensiones de los cuadros cortados para que el volumen sea máximo.



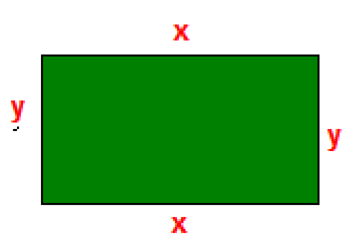


Volumen de la caja = $v = (12-2x)(12-2x)(x) \Rightarrow v = x(12-2x)^2$

$$v(x) = x(12-2x)^2 \Rightarrow v'(x) = 12(x-2)(x-6)$$
$$si: v'(x) = 0 \Rightarrow 12(x-2)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 2; x = 6(v.c.)$$
$$v''(x) = 24(x-4) \Rightarrow v''(2) = -48 < 0\ \exists\ máximo;\ v''(6) = 48\ \exists\ mínimo$$

NOTA: Por la naturaleza del problema, se ve que x no puede valer 6 cm. Porque el volumen sería 0, por lo tanto *x = 2 cm*.

3) ¿Cuál será la forma rectangular de un campo de área dada igual a $36\ Dm^2$ para que sea cercado por una valla de longitud mínima?



damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

Según el enunciado, área = $x\,.\,y$; $x\,.\,y = 36$

Mínimo = $2x + 2y$; $Min = 2x + 2y$

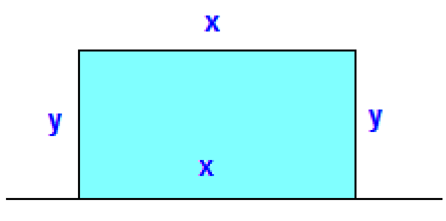
Despejamos y en la primera ecuación y su valor lo llevamos a la ecuación del mínimo.

$$y = \frac{36}{x} \Rightarrow Min(x) = 2x + 2\left(\frac{36}{x}\right) = \frac{2x^2 + 72}{x} \Rightarrow Min(x) = \frac{2x^2 + 72}{x}$$

$$Min'(x) = \frac{2x^2 - 72}{x^2};\ si: Min'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 72}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\ 6(v.c.)$$

$$Min''(x) = \frac{144}{x^3} \Rightarrow Min''(6) = \tfrac{2}{3} > 0 \Rightarrow \exists mín\ (nota:\ no\ se\ toma\ en\ cuenta\ x = -6)$$

4) Se quiere cercar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado que está junto al camino cuesta BF. 8 el metro y para los lados BF. 4 el metro, halla el área del mayor campo que puede cercarse con BF.1.440.



Según el enunciado, área = *x. y*

$$8x + 4x + 4x + 4y = 1.440 \Rightarrow 12x + 8y = 1.440 \Rightarrow 3x + 2y = 360$$

Despejando *y* en la segunda y llevando su valor al área, nos queda:

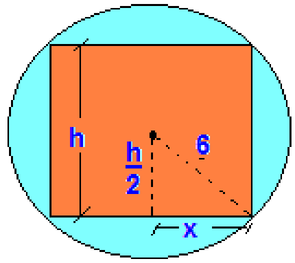
$$si: y = \frac{360 - 3x}{2} \Rightarrow A = xy \Rightarrow A(x) = x\left(\frac{360 - 3x}{2}\right) \Rightarrow A(x) = \frac{360x - 3x^2}{2}$$

$$A'(x) = \frac{360 - 6x}{2} \Rightarrow si:\ A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{360 - 6x}{2} = 0 \Rightarrow x = 60(v.c.)$$

$$y = \frac{360 - 3x}{2} \Rightarrow y = y = \frac{360 - 3(60)}{2} \Rightarrow y = 90\ m. \Rightarrow A = xy = (60m)(90m) = 5.400m^2$$

NOTA: Por la naturaleza del problema, no hace falta hallar la segunda derivada.

5) Una esfera tiene un radio de 6 cm. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo inscrito en ella.



En la figura *x* es el radio de la base del cilindro. Por Pitágoras $6^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + x^2$.

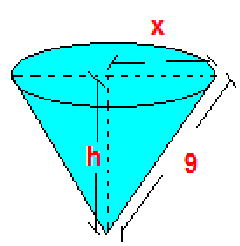
Volumen = $\pi \, . \, x^2 \, . \, h \quad pero \quad x^2 = 36 - \frac{h^2}{4}$

$$V(h)=\pi\left(36-\frac{h^2}{4}\right)h \Rightarrow V(h)=\frac{\pi\left(144h-h^3\right)}{4} \Rightarrow V'(h)=\frac{\pi}{4}\left(144-3h^2\right)$$

$$V'(h)=0 \Rightarrow \frac{\pi}{4}\left(144-3h^2\right)=0 \Rightarrow h=\frac{12}{\sqrt{3}}=\pm 4\sqrt{3};\ se\ toma: h=4\sqrt{3}$$

NOTA: Por la naturaleza del problema, no hace falta hallar la segunda derivada.

6) Para hacer un filtro de laboratorio, se pliega un papel circular. Si el radio de dicho papel mide 9cm. Calcular la altura del cono que se forma para que el volumen sea máximo.



$$9^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 81 - h^2$$

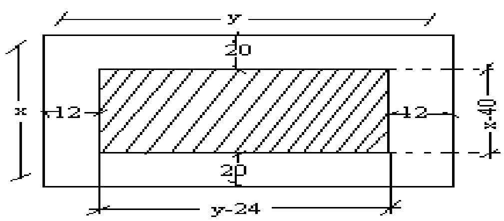
$$v=\frac{\pi x^2 h}{3} \Rightarrow V(h)=\frac{\pi\left(81-h^2\right)h}{3} \Rightarrow V(h)=\frac{\pi}{3}\left(81h-h^3\right)$$

$$V'(h)=\frac{\pi}{3}\left(81-3h^2\right); si: V'(h)=0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}\left(81-3h^2\right)=0 \Rightarrow h=\frac{9}{\sqrt{3}} \Rightarrow h=3\sqrt{3}cm$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

NOTA: Por la naturaleza del problema, no hace falta hallar la segunda derivada.

7) Se dispone de una hoja de papel para un cartel que mide 2m². Los márgenes superior e inferior, miden 20 cm. cada uno y los laterales 12 cm. cada uno. Hallar las dimensiones de las hojas, sabiendo que la parte impresa es máxima.



$$parte\,impresa: A=(x-40)\,(y-24); además\ \ área\,total: xy=2 \Rightarrow x=\tfrac{2}{y}$$

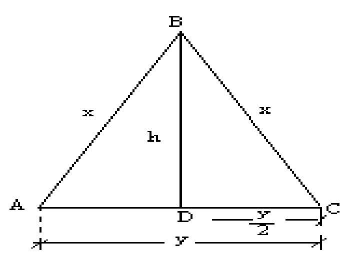
$$A(y)=\left(\tfrac{2}{y}-40\right)(y-24) \Rightarrow A(y)=(y-24)\left(\frac{2-40y}{y}\right)$$

$$A'(y)=\left(\frac{2-40y}{y}\right)+(y-24)\left(\frac{y(-40)-(2-40y)}{y^2}\right) \Rightarrow A'(y)=\frac{8(6-5y^2)}{y^2}$$

$$si: A'(y)=0 \Rightarrow \frac{8(6-5y^2)}{y^2}=0 \Rightarrow y=\pm\tfrac{\sqrt{30}}{5}(v.c.); y=0 \nexists A'(y)$$

$$xy=2 \Rightarrow x=\tfrac{2}{y} \Rightarrow x=\tfrac{10}{\sqrt{30}} \Rightarrow x=\tfrac{\sqrt{30}}{3}; y=\tfrac{\sqrt{30}}{5}$$

8) De todos los triángulos isósceles de 12 m de perímetro, hallar el de área máxima.



En la figura: área $=\dfrac{y.h}{2}$ por Pitágoras $\overline{BC}^2=\overline{DC}^2+\overline{BD}^2$; $x^2=\left(\dfrac{y}{2}\right)^2+h^2$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

Perímetro: $2x + y = 12 \ \rightarrow \ y = 12 - 2x$

$$h = \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}} \ ; \quad Area = \frac{y\,.\,h}{2} \Rightarrow Area = \frac{y\,.\sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}}{2}$$

$$si:\ y = 12 - 2x\ ;\ A(x) = \frac{(12-2x)\sqrt{x^2 - \frac{(12-2x)^2}{4}}}{2} = \frac{2(6-x)\ \sqrt{\frac{4x^2 - 144 + 48x - 4x^2}{4}}}{2}$$

$$A(x) = (6-x)\frac{\sqrt{48x - 144}}{2} \Rightarrow A(x) = (6-x)\frac{\sqrt{48x(x-3)}}{2} \Rightarrow A(x) = (6-x)\frac{4\sqrt{3(x-3)}}{2} \Rightarrow$$

$$A(x) = 2\,(6-x)\ \sqrt{3\,(x-3)} \Rightarrow A'(x) = 2\left[-\ 2\sqrt{3\,(x-3)} + \frac{(6-x)\sqrt{3\,(x-3)}\,(3)}{3(x-3)}\right]$$

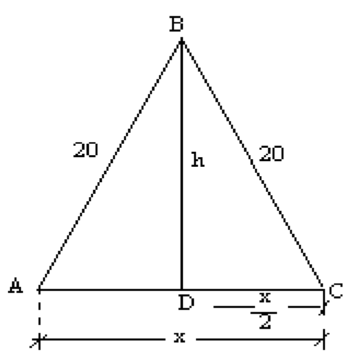
$$A'(x) = \frac{3\sqrt{3(4-x)}}{\sqrt{x-3}} \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{3(4-x)}}{\sqrt{x-3}} = 0 \Rightarrow x = 4(v.c.); x = 3 \nexists A'(x)$$

$$para\ \ x = 4 \Rightarrow y = 4$$

El triángulo de área máxima es equilátero de lado igual a 4cm.

NOTA: Por la naturaleza del problema, se ve que para *x = 3*, el triangulo se transformaría en una recta, por lo tanto x = 4, es la solución.

9) En un triángulo isósceles, los lados iguales miden 20 cm. cada uno. Hallar la longitud de la base para que el área sea máxima.



damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$en\ la\ \ figura: \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2;\ (20)^2 = h^2 + \left(\tfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{400 - \frac{x^2}{4}}$$

$$Area: A = \frac{xh}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{x\sqrt{400 - \frac{x^2}{4}}}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{x\ \sqrt{1600 - x^2}}{4}$$

$$A'(x) = \frac{\sqrt{1600 - x^2} - \dfrac{x\ (-2x)}{2\sqrt{1600 - x^2}}}{4} \Rightarrow A'(x) = \frac{800 - x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}}$$

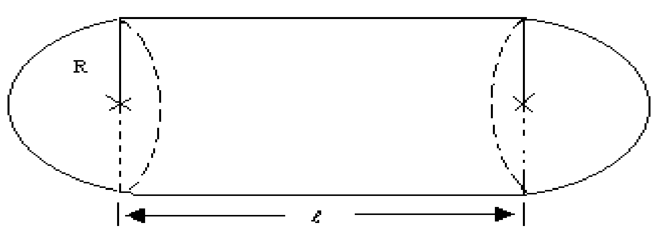
$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{800 - x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}} = 0\,\frac{\left(800 - x^2\right)\sqrt{1600 - x^2}}{2\ (1600 - x^2)} =$$

$$Por\ lo\ \tan to:\quad 800 - x^2 = 0 \qquad y \qquad \sqrt{1600 - x^2} = 0\ ;\ 800 - x^2 = 0 \quad \rightarrow\ x = 20\sqrt{2}$$

$$\sqrt{1600 - x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 40$$

NOTA: Para la naturaleza del problema, para x = 40 el triángulo se transformarías en una recta, por lo tanto $x = 20\sqrt{2}\,m.$

10) Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10 π . Pies?



$$a)Tenemos\ \ que: A.esfera = 4\pi R^2;\ \ A.\ cilindro\ \sin\ tapa = 2\pi R\ell$$

$$b)La\ \ función\ a\ optimizar\ es\ el\ \cos to: C = 2\left(4\pi R^2\right) + 2\pi R\ell$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$c)\, V.\, esfera = \frac{4}{3}\pi R^3;\;\; V.\; cilindro = \pi R^2 \ell \Rightarrow V_{total} = \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi R^2 \ell \Rightarrow \ell = \frac{30 - 4R^3}{3R^2}$$

$$C(R) = 8\pi R^2 + 2\pi R\left(\frac{30 - 4R^3}{3R^2}\right) \Rightarrow C(R) = 8\pi R^2 + \frac{60\pi - 8\pi R^3}{3R}$$

$$C(R) = \frac{24\pi R^3 + 60\pi - 8\pi R^3}{3R} \Rightarrow C(R) = \frac{16\pi R^3 + 60\pi}{3R}$$

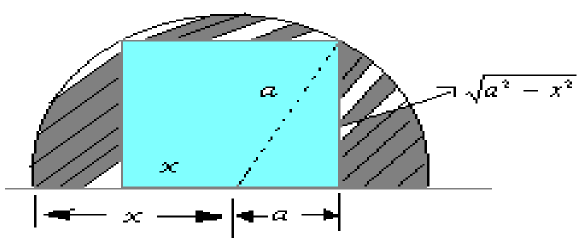
$$d)\; C'(R) = \frac{48\pi R^3 (3R) - 3(16\pi R^3 + 60\pi)}{(3R)^2} \Rightarrow C'(R) = \frac{144\pi R^3 - 48\pi R^3 - 180\pi}{(3R)^2}$$

$$C'(R) = \frac{96\pi R^3 - 180\pi}{(3R)^2};\, si:\; C'(R) = 0 \Rightarrow \frac{96\pi R^3 - 180\pi}{(3R)^2} = 0 \Rightarrow 96\pi R^3 - 180\pi = 0 \Rightarrow R^3 = \frac{180\pi}{96\pi}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{180}{96}} = \sqrt[3]{\frac{2^2\,.\,3^2\,.\,5}{2^5\,.\,3}} = \sqrt[3]{\frac{3.5}{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt[3]{15}}{2}\; ft$$

$$e)\; Si:\; R = \frac{\sqrt[3]{15}}{2}\; ft \Rightarrow \;\ell = 2\sqrt[3]{15}\; ft$$

11) Determine las dimensiones del rectángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio "a" de manera que dos de sus vértices estén sobre el diámetro.



Rectángulo tiene como:

$$Base = 2x;\;\; Altura = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow A_{ret} = bh \Rightarrow A_{ret} = (2x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$A'(x) = 2\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow A'(x) = \frac{2a^2 - 2x^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow A'(x) = \frac{2a^2 - 4x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$Si\;\; A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2a^2 - 4x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow 2a^2 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$b = 2x \Rightarrow b = a\sqrt{2};\;\; h = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{a\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{4a^2 - 2a^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

12) Encuentre el punto de la gráfica $y = x^2 + 1$ más cercano al punto (3, 1).

$La\ distancia\ entre\ los\ puntos\ (x, y)\ y\ (3,1)\ es: d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$

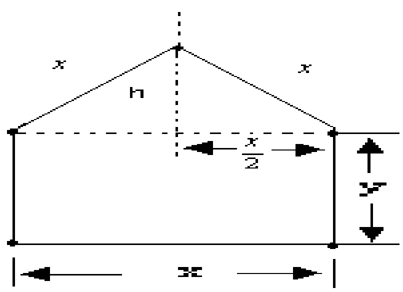
$pero: y = x^2 + 1 \Rightarrow d = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2+1-1)^2} \Rightarrow d = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$

$d'(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}};\ Si: d'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2x^3 + x - 3}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = 0 \Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0$

$por\ Ruffini: (x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow x = 1 (v.c.);\quad 2x^2 + 2x + 3 \neq 0$

$Si: x = 1 \Rightarrow y = 2.\ \ Punto\ (1, 2)$

13) Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero. Encuentre las dimensiones del rectángulo para el cual el área de la ventana es máxima, si el perímetro de la misma debe ser 12 pies.



$Cálculo\ de\ h: h = \sqrt{x^2 - (\tfrac{x}{2})^2} \Rightarrow h = \sqrt{\tfrac{3x^2}{4}} \Rightarrow h = (\tfrac{x\sqrt{3}}{2})$

$Área\ del\ triángulo: A = \dfrac{x\,h}{2} \Rightarrow A = \dfrac{x(\frac{x\sqrt{3}}{2})}{2} \Rightarrow A = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

$Área\ del\ rectángulo: A = xy$

$Para: y\ en\ función\ de\ x,\ usamos\ el\ perímetro\ de\ la\ ventana:$

$P = 2y + 3x \Rightarrow 12 = 2y + 3x \Rightarrow y = \dfrac{12 - 3x}{2} \Rightarrow A(x) = \dfrac{12x - 3x^2}{2}$

$Área\ total\ de\ la\ figura: A_T(x) = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{12x - 3x^2}{2}$

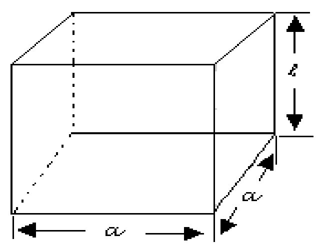
$A_T'(x) = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} + \dfrac{12 - 6x}{2} \Rightarrow A_T'(x) = \dfrac{x\sqrt{3} + 12 - 6x}{2} = 0 \Rightarrow x(\sqrt{3} - 6) + 12 = 0$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$x = \frac{-12}{\sqrt{3}-6} \Rightarrow x = \frac{12}{6-\sqrt{3}} \; Base\ del\ rectángulo \Rightarrow si: y = \frac{12-3x}{2} \Rightarrow y = \frac{12-3(\frac{12}{6-\sqrt{3}})}{2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{72-12\sqrt{3}-36}{2\left(6-\sqrt{3}\right)} \quad y = \frac{36-12\sqrt{3}}{2\left(6-\sqrt{3}\right)} \Rightarrow y = \frac{18-6\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}} \quad Altura\ del\ rectángulo$$

14) Para que un paquete pueda enviarse por correo es necesario que la suma de su longitud y el perímetro de su base no exceda de 108 pulgadas. Encuentre las dimensiones de la caja con base cuadrada de mayor volumen que se puede enviar por correo.



$El\ perímetro\ de\ la\ base\ es: P = 4a$

$Condición: \ell + 4a \leq 108\ pu\lg,\ tomaremos\ el\ extremo\ máximo$

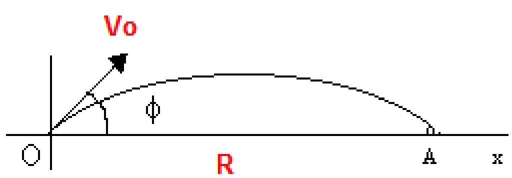
$\ell + 4a = 108,\ de\ donde\ \ell = 108 - 4a$

$El\ Volumen: V = aa\ell \Rightarrow V = a^2\ell \Rightarrow V = a^2\left(108-4a\right) \Rightarrow V(a) = 108a^2 - 4a^3$

$V'(a) = 215a - 12a^2; Si:\ V'(a) = 0 \Rightarrow 4a\left(54-3a\right) = 0 \Rightarrow a = 0\ no\ es\ solución,$

$54 - 3a = 0 \Rightarrow a = 18\ pu\lg \Rightarrow \ell = 108 - 4\ (18) \Rightarrow \ell = 36\ Pu\lg$

15) La distancia R = OA (en el vacío) que cubre un proyectil, lanzando con velocidad inicia, V_0 desde una pieza de artillería que tiene un ángulo de evaluación ϕ respecto al horizonte, se determina según la fórmula: $R = \frac{V_0^2\ Sen\ 2\phi}{g}$ Determinar el ángulo ϕ con el cual la distancia R es máxima dada la velocidad inicial V_0.



damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

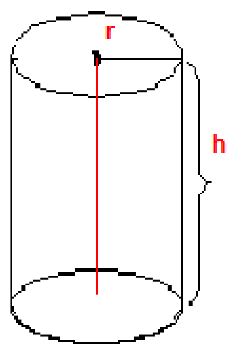
$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ (condición)

$$\frac{dR}{d\phi}=\frac{2V_0^2\cos(2\phi)}{g}\Rightarrow\frac{dR}{d\phi}=0\Rightarrow\frac{2V_0^2\cos(2\phi)}{g}=0\Rightarrow\cos(2\phi)=0\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{4}(v.c.)$$

$$\frac{d^2R}{d\phi^2}=-\frac{(4V_0^2)sen(2\phi)}{g}\Rightarrow sust.\ v.c.en\ \frac{d^2R}{d\phi^2}\Rightarrow\frac{d^2R}{d\phi^2}=-\frac{(4V_0^2)sen2(\frac{\pi}{4})}{g}\Rightarrow\frac{d^2R}{d\phi^2}=-\frac{(4V_0^2)}{g}<0$$

$$\Rightarrow en\ \phi=\frac{\pi}{4}\exists\ máximo\Rightarrow sust\ en\ R(\phi)=\frac{V_0^2\ Sen(2\phi)}{g}\Rightarrow R(\phi)=\frac{V_0^2}{g}$$

16) ¿Qué dimensiones debe tener un cilindro para que sea mínima su área total, dado el volumen V?



$$r=radio;\ \ h=altura\Rightarrow S=2\pi r^2+2\pi rh;\ \ V_{cilindro}=\pi r^2h\Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$$

$$S=2\pi r^2+2\pi r(\tfrac{V}{\pi r^2})\Rightarrow S(r)=2\pi r^2+(\tfrac{2V}{r})\Rightarrow S(r)=2\left(\pi r^2+\tfrac{V}{r}\right)$$

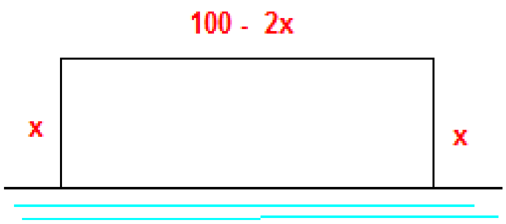
$$\frac{ds}{dr}=2\left[2\pi r-\frac{V}{r^2}\right]\Rightarrow\frac{ds}{dr}=0\Rightarrow 2\left[\frac{2\pi r^3-V}{r^2}\right]=0\Rightarrow 2\pi r^3-V=0\Rightarrow r^3=\tfrac{V}{2\pi}\ (v.c.);r=0\ \nexists$$

$$\frac{d^2S}{dr^2}=2\left[2\pi+\frac{2V}{r^3}\right]\Rightarrow sust\ v.c.\Rightarrow\frac{d^2S}{dr^2}=2\left[2\pi+\frac{2V}{\frac{V}{2\pi}}\right]\Rightarrow\frac{d^2S}{dr^2}=2\left[2\pi+4\pi\right]=12\pi>0$$

$$r^3=\tfrac{V}{2\pi}\Rightarrow r=\sqrt[3]{\tfrac{V}{2\pi}}\Rightarrow si:h=\frac{V}{\pi r^2}\Rightarrow h=\frac{V}{\pi\sqrt[3]{(\frac{V}{2\pi})^2}}$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

17) Un terreno rectangular se encuentra adyacente a un río y se debe cercar en 3 lados, ya que el lado que da al río no requiere cerca. Si se dispone de 100 m de cerca, encuentre las dimensiones del terreno con el área máxima.

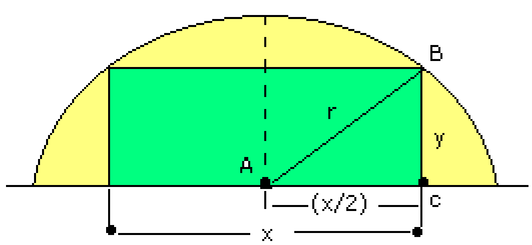


$$0 < x < 50(condición);\ \ A = b\,h \Rightarrow A = x(100-2x) \Rightarrow A(x) = 100x - 2x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 100 - 4x \Rightarrow \frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25(v.c.)$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -4 \Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2} < 0 \Rightarrow en\ \ x = 25\ \exists\ \ máximo \Rightarrow x = h = 25m \Rightarrow b = 50m \Rightarrow A = 1250\,m^2$$

18) Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una semicircunferencia de radio *r*.



$$A_{rectángulo} = x\,y \Rightarrow \measuredangle\widehat{ABC} : r^2 = y^2 + (\tfrac{x}{2})^2 \Rightarrow (\tfrac{x}{2})^2 = r^2 - y^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{r^2 - y^2}$$

$$A(y) = 2y\sqrt{r^2 - y^2} \Rightarrow \frac{da}{dy} = 2\sqrt{r^2 - y^2} + \cancel{2}y\left[\frac{1}{\cancel{2}}\left(r^2 - y^2\right)^{-1/2}(-2y)\right]$$

$$\frac{da}{dy} = \frac{2\left[r^2 - 2y^2\right]}{\sqrt{r^2 - y^2}} \Rightarrow si : \frac{da}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{2\left[r^2 - 2y^2\right]}{\sqrt{r^2 - y^2}} = 0 \Rightarrow r^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow y_1 = \tfrac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{r^2 - y^2} \Rightarrow r = y\ \nexists$$

$$\frac{d^2A}{dy^2} = \frac{2[-4y]\sqrt{r^2 - y^2} - 2\left[r^2 - 2y^2\right]\left[\tfrac{1}{2}\left(r^2 - y^2\right)^{-1/2}(-2y)\right]}{\left(r^2 - y^2\right)}$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$\frac{d^2A}{dy^2}=\frac{2y\left(r^2-y^2\right)^{-1/2}\left[-4\left(r^2-y^2\right)+\left(r^2-y^2\right)\right]}{\left(r^2-y^2\right)}$$

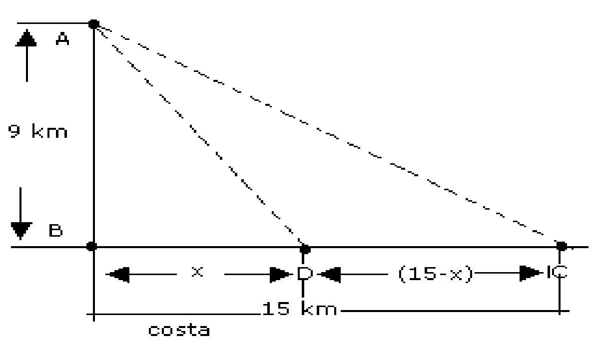
$$\frac{d^2\,A}{dy^2}=\frac{2y\,\left[-4r^2+4y^2+r^2-2y^2\right]}{\sqrt{\left(r^2-y^2\right)^3}}\Rightarrow\frac{d^2A}{dy^2}=\frac{2y\,\left[\,2y^2-3r^2\right]}{\sqrt{\left(r^2-y^2\right)^3}}$$

$$\frac{d^2A}{dy^2}=\frac{2(\frac{r\sqrt{2}}{2})\,\left[2(\frac{r\sqrt{2}}{2})^2-3r^2\right]}{\sqrt{\left(r^2-(\frac{r\sqrt{2}}{2})^2\right)^3}}\Rightarrow\frac{d^2A}{dy^2}=\frac{r\sqrt{2}\,\left[-r^2\right]}{\sqrt{\left[r^2-\frac{r^2}{2}\right]^3}}\Rightarrow\frac{d^2A}{dy^2}=\frac{-r^3\sqrt{2}}{\sqrt{\left[\frac{2r^2-r^2}{2}\right]^3}}$$

$$\frac{d^2A}{dy^2}=\frac{-r^3\sqrt{2}}{\sqrt{(\frac{r^2}{2})^3}}\Rightarrow\frac{d^2A}{dy^2}=\frac{-r^3\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{r^6}{8}}}\Rightarrow\frac{d^2A}{dy^2}=\frac{-r^3\sqrt{2}}{r^3\sqrt{\frac{1}{2^3}}}\Rightarrow\frac{d^2A}{dy^2}=\frac{-8}{r}\;<\;0$$

$$y=\frac{r}{\sqrt{2}};x=2\sqrt{r^2-\frac{r^2}{2}}\Rightarrow x=2\sqrt{\frac{r^2}{2}}\Rightarrow\quad x=\frac{2r}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=2y$$

19) Un buque militar se encuentra anclado a 9 km. del punto más próximo de la costa. Se precisa enviar un mensajero a un campamento militar situado a 15 km. del punto de la costa más próximo al buque, medido a lo largo de la costa; el mensajero andando a pie hace 5 km/h y remando 4 km/h; ¿En qué punto de la costa debe desembarcar el mensajero para llegar al campamento en el mínimo tiempo posible?



damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$por\ \ pítagoras : \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$

Remando: $AD = \sqrt{9^2 + x^2}$;   A pie: $DC = 15 - x$

$M.R.U. \Rightarrow V = \frac{x}{t} \Rightarrow t = \frac{x}{V} \Rightarrow t.\ remando : t_R = \frac{\sqrt{81+x^2}}{4\frac{km}{h}}$; $t.a\ pie : t_P = \frac{15-x}{5\frac{km}{h}}$

$$t_t = t_R + t_P \Rightarrow t_t(x) = \frac{\sqrt{81+x^2}}{4} + \frac{15-x}{5} \Rightarrow t_t(x) = \frac{\sqrt{81+x^2}}{4} - \frac{x}{5} + 3$$

$$\frac{dt}{dx} = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2}\left(81+x^2\right)^{-1/2}(2x)\right] - \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{x}{4\sqrt{81+x^2}} - \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{5x - 4\sqrt{81+x^2}}{20\sqrt{81+x^2}}$$

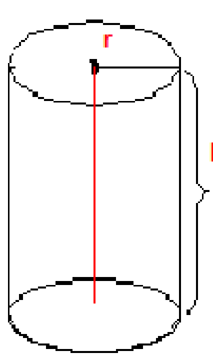
$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow 5x - \sqrt{81+x^2} = 0 \Rightarrow (5x)^2 = \left(4\sqrt{81+x^2}\right)^2 \Rightarrow 25x^2 = 16x^2 + 1296 \Rightarrow x = 12\,(v.c.)$$

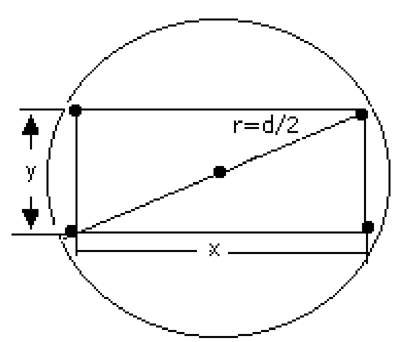
$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{81+x^2} - \frac{x}{2}\left(81+x^2\right)^{-1/2}(2x)}{\left(81+x^2\right)} \Rightarrow \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{81}{4\sqrt{\left(81+x^2\right)^3}}$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{81}{4\sqrt{81+(12)^2}} > 0 \quad \therefore \quad x = 12\,Km \quad \exists\ mínimo\ tiempo\ empleado$$

20) De un tronco redondo de diámetro d hay que cortar una viga de sección rectangular. ¿Qué ancho (x) y altura (y) deberá tener esta sección para que la viga tenga resistencia máxima posible. A) A la compresión, B) A la flexión?

Nota: La resistencia de la viga a la compresión es proporcional al área de su sección transversal mientras que la flexión es proporcional al producto del ancho de esta sección por el cuadrado de su altura.





$$A_{rectángulo}: A = bh \Rightarrow b = x;\; h = y;\; Por\ pitágoras: d^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{d^2 - x^2}$$

$$R_c(x) = kx\sqrt{d^2 - x^2} \Rightarrow \frac{dR_c}{dx} = k\left[\sqrt{d^2 - x^2} + x\left(\tfrac{1}{2}\left(d^2 - x^2\right)^{-1/2}\right)(-2x)\right] \Rightarrow \frac{dR_c}{dx} = \frac{k\left(d^2 - x^2\right)}{\sqrt{d^2 - x^2}}$$

$$\frac{dR_c}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{k\left(d^2 - x^2\right)}{\sqrt{d^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow k \neq 0;\; d^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \tfrac{d}{\sqrt{2}}\ (v.c.); Si: x = d\ \nexists\ \frac{dR_c}{dx}$$

$$\frac{d^2R_c}{dx^2} = k\left[\frac{-4x\left(\sqrt{d^2 - x^2}\right) - \left(d^2 - 2x^2\right)\tfrac{1}{2}\left(d^2 - x^2\right)^{-1/2}(-2x)}{\left(d^2 - x^2\right)}\right] \Rightarrow \frac{d^2R_c}{dx^2} = \frac{kx\left(2x^2 - 3d^2\right)}{\sqrt{\left(d^2 - x^2\right)^3}}$$

$$sust.\ v.c.\ en\ \frac{d^2R_c}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2R_c}{dx^2} = \frac{k(\tfrac{d}{\sqrt{2}})\left(2(\tfrac{d}{\sqrt{2}})^2 - 3d^2\right)}{\sqrt{\left(d^2 - (\tfrac{d}{\sqrt{2}})^2\right)^3}} \Rightarrow \frac{d^2R_c}{dx^2} = \frac{k(\tfrac{d}{\sqrt{2}})\left(2(\tfrac{d^2}{2}) - 3d^2\right)}{\sqrt{\left(\tfrac{2d^2 - d^2}{2}\right)^3}}$$

$$\frac{d^2R_c}{dx^2} = \frac{k(\tfrac{d}{\sqrt{2}})\left(-d^2\right)}{\sqrt{\left(\tfrac{d^2}{2}\right)^3}} \Rightarrow \frac{d^2R_c}{dx^2} = \frac{-kd^3\ 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\ d^3} \Rightarrow \frac{d^2R_c}{dx^2} = -4k < 0 \Rightarrow en\ x = \tfrac{d^2}{2}\ \exists\ máximo$$

$$si: x = \frac{d}{\sqrt{2}}(ancho) \Rightarrow y = \sqrt{d^2 - x^2} \Rightarrow y = \sqrt{d^2 - (\tfrac{d}{\sqrt{2}})^2} \Rightarrow y = \frac{d}{\sqrt{2}}(altura)$$

$$V_t = \pi r^2 h + \tfrac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow V - \tfrac{4\pi r^3}{3} = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V - \tfrac{4\pi r^3}{3}}{\pi r^2} \Rightarrow h = \frac{3V - 4\pi r^3}{3\pi r^2}$$

$$A_t = 2\pi r h + 4\pi r^2 \Rightarrow A_t(r) = 2\pi r\left[\frac{3V - 4\pi r^3}{3\pi r^2}\right] + 4\pi r^2 \Rightarrow A_t(r) = 2\left[\frac{3V - 4\pi r^3}{3r}\right] + 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{2}{3}\left[\frac{\left(-12\pi r^2\right)(r) - \left(3V - 4\pi r^3\right)}{r^2}\right] + 8\pi r \Rightarrow \frac{dA}{dr} = \frac{-2}{3}\left[\frac{8\pi r^3 + 3V}{r^2}\right] + 8\pi r$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{-16\pi r^3 - 6V + 24\pi r^3}{3r^2} \Rightarrow \frac{dA}{dr} = \frac{-6V + 68\pi r^3}{3r^2};\; si: \frac{dA}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{-6V + 68\pi r^3}{3r^2} = 0$$

$$-6V + 68\pi r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{6V}{8\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\tfrac{3V}{4\pi}}\ (v.c.);\; r = 0\ \nexists$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$\frac{dA}{dr}=\frac{-6V+68\pi r^3}{r^2}\Rightarrow\frac{dA}{dr}=-\frac{2V}{r^2}+\frac{8\pi r}{3}\Rightarrow\frac{d^2A}{dr^2}=-\frac{4V}{r^3}+\frac{8\pi}{3}$$

$$sust.\ v.c.\ en\frac{d^2A}{dr^2}\Rightarrow\frac{d^2A}{dr^2}=-\frac{4V}{(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}})^3}+\frac{8\pi}{3}\Rightarrow\frac{d^2A}{dr^2}=\frac{16V\pi}{3V}+\frac{8\pi}{3}\Rightarrow\frac{d^2A}{dr^2}=6\pi>0$$

$$en\ r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\ \exists\ mínimo\Rightarrow h=\frac{3V-4\pi r^3}{3\pi r^2}\Rightarrow h=\frac{3V-4\pi(\frac{3V}{4\pi})}{3\pi\sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}}\Rightarrow h=0$$

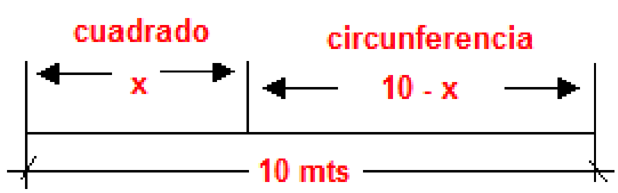
b) $R_F=Kxy^2\Rightarrow d^2=x^2+y^2\Rightarrow y^2=d^2-x^2\Rightarrow R_F=Kx\left(d^2-x^2\right)\Rightarrow R_f(x)=K\left(xd^2-x^3\right)$

$$\frac{dR_f}{dx}=K\left(d^2-x^2\right)\Rightarrow\frac{dR_f}{dx}=0\Rightarrow K\left(d^2-x^2\right)=0\Rightarrow K\neq0;\ d^2-3x^2=0\Rightarrow x=\tfrac{d}{\sqrt{3}}(v.c.)$$

$$\frac{d^2R_f}{dx^2}=K\left(-6x\right)\Rightarrow\frac{d^2R_f}{dx^2}=-6Kx;\Rightarrow sust.\ v.c.\ en\frac{d^2R_f}{dx^2}\Rightarrow\frac{d^2R_f}{dx^2}=-6K(\tfrac{d}{\sqrt{3}})<0\ \exists\ máximo.$$

$$Ancho:\ x=\frac{d}{\sqrt{3}};\ altura:\ y=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{3}}\Rightarrow y=\sqrt{\frac{3d^2-d^2}{3}}\Rightarrow y=\sqrt{\tfrac{2}{3}}d$$

21) Un trozo de alambre de 10 m. de longitud se va a cortar en dos partes. Una parte será doblada en forma de circunferencia y la otra en forma de cuadrado. ¿Cómo deberá cortarse el alambre para que el área combinada de las dos figuras sean tan pequeñas como sea posible.



Cuadrado de lado $x\Rightarrow$ longitud del alambre $=4x$

Circunferencia de radio $r\Rightarrow$ longitud del alambre $=2\pi r\Rightarrow 10=4x+2\pi r\Rightarrow x=\dfrac{10-2\pi r}{4}$

$$A_{cuadrado}=x^2;A_{circunferencia}=\pi r^2\Rightarrow Área\ combinada:\ A=x^2+\pi r^2\Rightarrow$$

$$A(r)=\left[\frac{10-2\pi r}{4}\right]^2+\pi r^2\Rightarrow\frac{dA}{dr}=2\left[\frac{10-2\pi r}{4}\right]\left(\frac{-2\pi}{4}\right)+2\pi r\Rightarrow\frac{dA}{dr}=\left(\frac{-10+2\pi^2r}{4}\right)+2\pi r$$

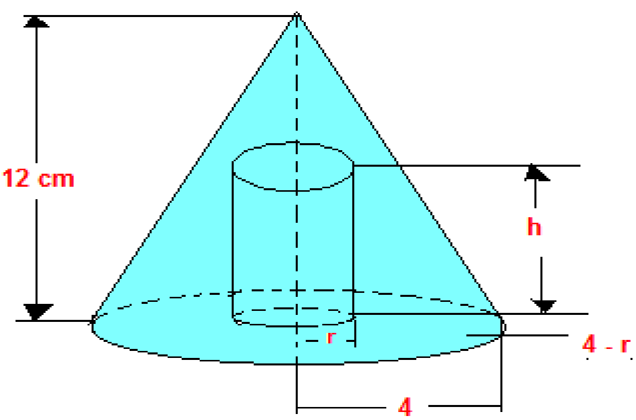
damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$\frac{dA}{dr}=\frac{-5\pi+\pi^2 r}{2}+2\pi r\Rightarrow\frac{dA}{dr}=\frac{\pi(-5+r(\pi+4))}{2};si:\frac{dA}{dr}=0\Rightarrow r=\frac{5}{(\pi+4)}(v.c.)$$

$$\frac{d^2A}{dr^2}=\frac{\pi(\pi+4)}{2}\Rightarrow\frac{d^2A}{dr^2}=>0\Rightarrow en\ r=\tfrac{5}{\pi+4}\ \exists\ mínimo$$

$$x=\left[\frac{5-\pi r}{2}\right]\Rightarrow x=\left[\frac{5-\pi\left[\frac{5}{\pi+4}\right]^2}{2}\right]\Rightarrow x=\left[\frac{5\pi+20-5\pi}{2(\pi+4)}\right]\Rightarrow x=\frac{10}{(\pi+4)}\Rightarrow x\simeq 1.4$$

22) Calcular el volumen máximo del cilindro circular recto, que se puede inscribir en el cono de 12 cm de altura y 4 cm en la base, de manera que los ejes del cilindro y del cono coincidan.



La figura representa una sección transversal del cono y del cilindro que pasa por el eje de ambos.

por relación de triágulos semejntes

$$\frac{h}{4-r}=\frac{12}{4}\Rightarrow\frac{h}{4-r}=3\Rightarrow h=3(4-r)$$

$$Volumen\ del\ cilindro:\ V=\pi r^2h\Rightarrow V(r)=\pi r^2\left[3(4-r)\right]\Rightarrow V(r)=3\pi r^2(4-r)$$

$$si: r=0\ \ ó\ \ r=4\ (volumen\ máximo\ no\ se\ alcanza\ en\ la\ frontera)$$

$$V(r)=3\pi\left[4r^2-r^3\right]\Rightarrow\frac{dv}{dr}=3\pi\left[8r-3r^2\right];si:\frac{dv}{dr}=0\Rightarrow 3\pi\left[8r-3r^2\right]=0$$

$$3\pi\neq 0;\ 8r-3r^2=0\Rightarrow r\left[8-3r\right]=0\Rightarrow r=0;r=\frac{8}{3}(v.c.)$$

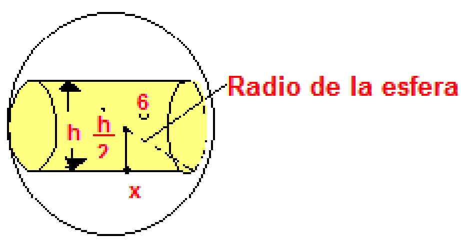
damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$\frac{d^2V}{dr^2} = 3\pi[8-6r] \Rightarrow \frac{d^2V}{dr^2} = 3\pi[8-6(\tfrac{8}{3})r] < 0 \Rightarrow \exists\ máximo$$

$$Calculamos\ la\ altura: h = 3\left(4-\tfrac{8}{3}\right) \Rightarrow h = 4$$

$$El\ volumen\ máximo\ del\ cilindro\ inscrito\ es: V = \pi(\tfrac{8}{3})^2 4 \Rightarrow V = 89.4\ cm^3$$

23) Una esfera tiene un radio de 6 cm. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo inscrito en ella.



X = radio del cilindro

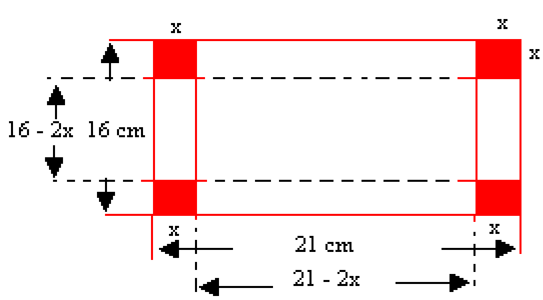
Volumen del cilindro: $V = \pi r^2 h;\quad por\ pitágoras: 6^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + x^2$

$$x^2 = 36 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{144-h^2}{4} \Rightarrow V(h) = \pi\left[\frac{144-h^2}{4}\right]h \Rightarrow V = \frac{\pi}{4}\left[144h - h^3\right]$$

$$\frac{dv}{dh} = \frac{\pi}{4}\left[144-3h^2\right] si: \frac{dv}{dh} = 0 \Rightarrow 144-3h^2 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{144}{3}} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{d^2v}{dh^2} = \frac{\pi}{4}(-6h) \Rightarrow \frac{d^2v}{dh^2} = \frac{\pi}{4}(-6)(4\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow h = 4\sqrt{3}\ \exists\ máximo$$

24) Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular de cartón de 16 c, de ancho y 21 cm de largo, recortando un cuadrado de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo.

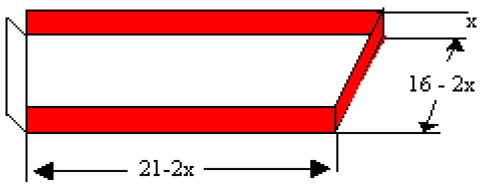


Sean: x = longitud en cm de los cuadrados que van a cortarse, V = Volumen en cm^3

El volumen de una caja es el producto de sus dimensiones.

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

NOTA: x no puede ser negativa debido a que el ancho del cartón mide 16 cm no puede cortarse cuadrado cuyos lados midan 8 cm de largo.



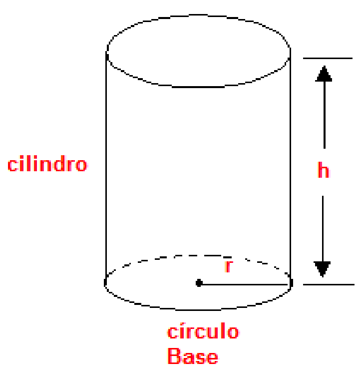
$$V = lah \Rightarrow v(x) = (21-2x)(16-2x)x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 74x^2 + 336$$

$$\frac{dv}{dx} = 12x^2 - 148x + 336 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 4(3x-28)(x-3); si: \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow 4(3x-28)(x-3) = 0$$

$$x = 9; x = 3(v.c.)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = (24x-148) \Rightarrow sustituimos: \frac{d^2v}{dx^2} = 24(3) - 148 < 0 \quad \exists \ máximo \ cuando \ x = 3$$

25) Se desea elaborar un pequeño recipiente cilíndrico sin tapa, que tenga un volumen de 24 π cm^3, el material que se usa para la base cuesta tres veces más que el que se emplea para la parte cilíndrica. Suponiendo que en la construcción no se desperdicia material, evaluar las dimensiones para las que es mínimo el costo del material de fabricación.



Donde: r = Radio de la base en (cm), h = la altura en (cm), V = 24 π cm^3

Sustituyendo: 24 π = π r^{2}h

$$h = \frac{24\pi}{\pi r^2} \quad \rightarrow \quad h = \frac{24}{r^2}$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

Para obtener la ecuación de Costo de Fabricación.

A = costo por cm^2 para la parte curva

El costo para la base $C_B = 3a(\pi r h)$

El costo para la parte cilíndrica: $C_C = a(2\pi r h)$
$C_C = a\ (\acute{a}rea\ del\ cilindro)$

$$El\ costo\ total\ C = C_B + C_C$$

$$C = 3a(\pi r^2) + a(2\pi rh) \Rightarrow C = a\pi(3r^2 + 2rh) \Rightarrow Como\ h = \tfrac{24}{r^2} \Rightarrow C(r) = a\pi\left[3r^2 + 2r\left(\tfrac{24}{r^2}\right)\right]$$

$$C(r) = a\pi\left[3r^2 + \left(\tfrac{48}{r}\right)\right] \Rightarrow \frac{dc}{dr} = a\pi\left(6r - \left(\tfrac{48}{r^2}\right)\right) \Rightarrow \frac{dc}{dr} = 6a\pi\left(\frac{r^3 - 8}{r^2}\right)$$

$$si: \frac{dc}{dr} = 0 \Rightarrow r^3 - 8 = 0 \Rightarrow r = 2(v.c.);\ si\ r = 0(no\ tiene\ sentido)$$

$$\frac{d^2c}{dr^2} = a\pi\left(6 + \left(\tfrac{96}{r^3}\right)\right) \Rightarrow sust.\ v.c.\ en: \frac{d^2c}{dr^2} = a\pi\left(6 + \left(\tfrac{96}{(2)^3}\right)\right) > 0 \Rightarrow en\quad r = 2\ \exists\ m\acute{\imath}nimo$$

$$como\ h = \frac{24}{r^2} \Rightarrow h = 6$$

26) Hallar dos números positivos que minimicen la suma del doble del primero más el segundo, si el producto de los dos números es 288.

Sea: (x) El primer número, (y) el segundo número, S la suma de ellos.

$$Del\ enunciado: S = 2x + y;\quad xy = 288 \Rightarrow y = \tfrac{288}{x} \Rightarrow S(x) = 2x + \tfrac{288}{x}$$

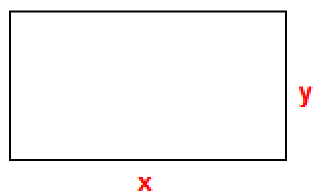
$$\frac{ds}{dx} = 2 - \tfrac{288}{x^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{2x^2 - 288}{x^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 288}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 288 = 0 \Rightarrow x = \pm 12$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{288}{x^3} \Rightarrow sust\ v.c.en\ \frac{d^2s}{dx^2} = \frac{288}{(12)^3} > 0 \Rightarrow en\ x = 12\ \exists\ m\acute{\imath}nimo$$

$$si: x = 12 \Rightarrow y = 24$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

27) Un granjero dispone de 100 metros de valla, con los que desea construir un corral rectangular de la máxima superficie posible.



(superficie del corral): $S = xy$; *del enunciado* $2x + 2y = 100 \Rightarrow y = 50 - x \Rightarrow S(x) = x(50 - x)$

$$\frac{ds}{dx} = 50 - 2x \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25 (v.c.)$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} = -2 < 0 \Rightarrow en\ x = 25\ \exists\ máximo \Rightarrow y = 25 \therefore S.máxima\ es\ de: S = 625m^2$$

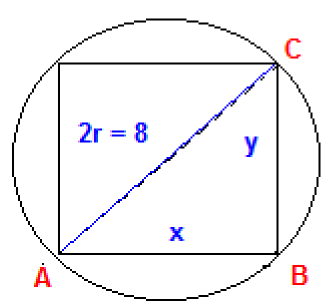
28) Hallar un número positivo cuya suma con su inverso sea mínima.

$$Sea\ x\ un\,número \Rightarrow su\ inverso\,es: \frac{1}{x} \Rightarrow S(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\frac{ds}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow si: \frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 (v.c.),\ pero\, el\ valor\ debe\ ser (+)$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow sust.\ v.c. \Rightarrow \frac{d^2s}{dx^2} = \frac{2}{(1)^3} > 0 \Rightarrow en\, x = 1 \exists mínimo$$

29) Dado un círculo de radio 4 dm, inscribe en él un rectángulo de área máxima.



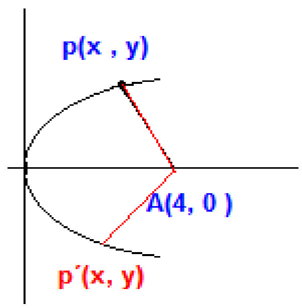
$$S = xy(área\ del\ rectágulo) \Rightarrow \triangle \widehat{ABC} \Rightarrow x^2 + y^2 = 8^2 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2} \Rightarrow S(x) = x\sqrt{64 - x^2}$$

$$S'(x) = \frac{2(32-x^2)}{\sqrt{64-x^2}} \Rightarrow si: S'(x) = 0 \Rightarrow \left(32-x^2\right) = 0 \Rightarrow x = \pm 4\sqrt{2}(v.c.)\,pero: x\ ni\ y\ pueden\ ser(-)$$

$$S''(x) = \frac{2x(x^2-96)}{\sqrt{(64-x^2)^3}} \Rightarrow sust.v.c.\ x = 4\sqrt{2} \Rightarrow S''(x) = \frac{2(4\sqrt{2})((4\sqrt{2})^2-96)}{\sqrt{(64-(4\sqrt{2})^2)^3}} = -4 < 0 \Rightarrow \exists máximo$$

$$si: x = 4\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{64 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 4\sqrt{2}$$

30) Calcular las coordenadas de los puntos de la parábola $y^2 = 4x$, tales que sus distancias al punto A (4,0) sean mínimas.



$$d\,(A,P) = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}\ \ y\ la\ parábola: y^2 = 4x \Rightarrow sust.en\,d\ porq\ el\ punto \in a\,la\ parábola$$

$$d\,(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (4x)^2} \Rightarrow d'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}} \Rightarrow d'(x) = 0 \Rightarrow x = 2(v.c.)$$

$$d''(x) = \frac{12}{\sqrt{(x^2-4x+16)^3}} \Rightarrow sust.\ v.c.\, d''(x) = \frac{12}{\sqrt{((2)^2-4(2)+16)^3}} > 0 \Rightarrow x = 2 \exists mínimo$$

$$si\ x = 2 \Rightarrow y = \pm\ 2\sqrt{2}. \Rightarrow p\left(2, 2\sqrt{2}\right);\ p´\left(2,\ -2\sqrt{2}\right)$$

31) De todas las parejas de números reales cuyas componentes tiene suma S dada encontrar aquella para la cual el producto P de las mismas es máximo. Aplica lo anterior al caso S = 40.

$$a)\ sea:\ x\ e\ y\,las\ componentes \Rightarrow x + y = S \Rightarrow y = S - x;\ además\ P = xy$$

$$Sust. \Rightarrow P(x) = x(S-x) \Rightarrow P(x) = -x^2 + xS \Rightarrow \frac{dP}{dx} = -2x + S \Rightarrow \frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow x = \tfrac{S}{2}$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -2 < 0 \Rightarrow en\ x = \tfrac{S}{2} \exists máximo \Rightarrow si\ x = \tfrac{S}{2} \Rightarrow y = \tfrac{S}{2} \Rightarrow (\tfrac{S}{2}, \tfrac{S}{2})$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$de\ P_{máx} = xy \Rightarrow P_{máx} = (\frac{S}{2})(\frac{S}{2}) \Rightarrow P_{máx} = \frac{S^2}{4}$

$b)\ Si: S = 40 \Rightarrow x = 20,\ y = 20 \Rightarrow\ P_{máx} = 400.$

32) De todas las parejas de números reales cuyas componentes positivas tienen producto dado, encontrar aquella para la cual la sume de esas componentes es mínima. Aplica lo anterior al caso P = 100.

$a.)\ Sea\ (x, y)\ la\ pareja \Rightarrow S = x + y;\ además\ P = xy \Rightarrow y = \frac{P}{x} \Rightarrow S(x) = x + \frac{P}{x}$

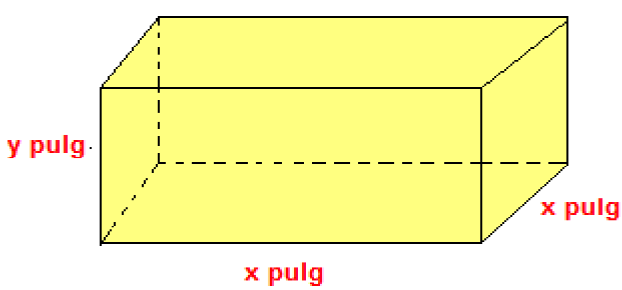
$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{P}{x^2} \Rightarrow \frac{dS}{dx} = \frac{x^2 - P}{x^2}; si: \frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 - P = 0 \Rightarrow x = \sqrt{P}(v.c.); condición\ x > 0$

$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{2p}{x^3} \Rightarrow sust.v.c. \Rightarrow \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{2p}{(\sqrt{P})^3} > 0 \Rightarrow en\ x = \sqrt{P}\ \exists mínimo \therefore$

$si:\ y = \frac{p}{x} \Rightarrow y = \sqrt{p} \Rightarrow la\ pareja\ es\ (\sqrt{p}, \sqrt{p})\ y\ su\ suma: S\ = 2\sqrt{p}$

$b)\ Siendo\ P = 100\ la\ pareja\ será\ (10,10)\ y\ su\ suma\ S = 20.$

33) Una caja cerrada de base cuadrada debe tener un volumen de 2000 pulg^3. El material del fondo y de la tapa de la caja tiene un costo de 0.03 dólares por pulg^2 y el material de los laterales cuesta 0.015 dólares por pulg^2. Determine las dimensiones de la caja para que el costo total sea mínimo.



Sea *x* pulgadas la longitud de un lado de la base cuadrada y $C(x)$ dólares el costo total del material. El área de la base es $x^2\ pulg^2$. Sea y pulgadas la profundidad de la caja. Ver figura. Puesto que el volumen de la caja es el producto del área de la base por la profundidad.

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$x^2 y = 2000 \Rightarrow y = \frac{2000}{x^2}$

$Del\ enunciado: C_{total} = área(tapa\ y\ \ fondo) + área(laterales) \Rightarrow C_{total} = 3\left(2x^2\right) + \frac{3}{2}\left(4xy\right)$

$C\left(x\right) = 6x^2 + \ \ 6x\left(\frac{2000}{x^2}\right) \Rightarrow C\ \left(x\right) = 6x^2 + \frac{12000}{x}; Dom: (0, \infty)$

$C'\left(x\right) = 12x - \left(\frac{12000}{x^2}\right) \Rightarrow si: C'\left(x\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{12x^3 - 12000}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10(v.c.)$

$C''\ \left(x\right) = 12 + \dfrac{24000}{x^3} \Rightarrow sust.v.c.\ \ C''\left(10\right) = 12 + \dfrac{24000}{(10)^3} > 0 \Rightarrow en\ \ x = 10\ \exists\ mínimo$

$\Rightarrow C_{mín}: x = \ 10\ pu\lg; y = \ \ 20\ pu\lg\ \ y\,el\ \ área\ \ de\ \ la\ \ base\ \ será\ \ de\ 100\ p\lg^2$

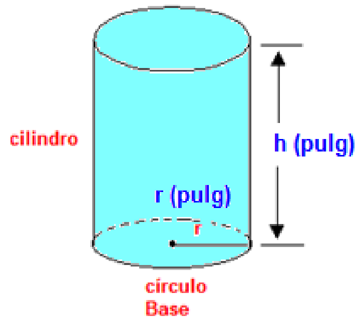
34) Demostrar que de todos los rectángulos de perímetro p dado, el de máxima área es el cuadrado.

$perímetro\,del\ \ rectángulo: p = 2(x+y) \Rightarrow 2x + 2y = p \Rightarrow y = \frac{p-2x}{2};\ y\ su\ área: A = xy$

$sust. A = x(\frac{p-2x}{2}) \Rightarrow A(x) = \dfrac{px - 2x^2}{2} \Rightarrow \dfrac{dA}{dx} = \dfrac{p-4x}{2}; si\ \ \dfrac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow p - 4x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{p}{4}(v.c.)$

$\dfrac{d^2A}{dx^2} = -2 < 0 \Rightarrow en\ \ x = \dfrac{p}{4}\ \exists\ máximo \Rightarrow y = \frac{p-2(\frac{p}{4})}{2} \Rightarrow y = \dfrac{p}{4} \therefore es\,un\ \ cuadrado: A_{máx} = \dfrac{p^2}{16}$

35) Si una letra cerrada de estaño con un volumen de 16π.pulg3 debe tener la forma de un cilindro circular recto, determinar la altura y el radio de dicha lata para utilizar la mínima cantidad de material en su manufactura.



área superficial lateral: $2\pi rh\,(pu\lg)^2$ área de la parte superior: $\pi r^2\,pu\lg^2$

área de la base: $\pi r^2 (pu\lg)^2 \Rightarrow S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$El\ volumen\ del\ cilindro\ circular\ recto: V=\pi r^2 h \Rightarrow 16\pi=\pi r^2 h \Rightarrow h=\frac{16}{r^2}$$

$$S(r)=2\pi r\left(\frac{16}{r^2}\right)+2\pi r^2 \Rightarrow S(r)=\frac{32\pi}{r}+2\pi r^2; DomS(r):(0,+\infty)$$

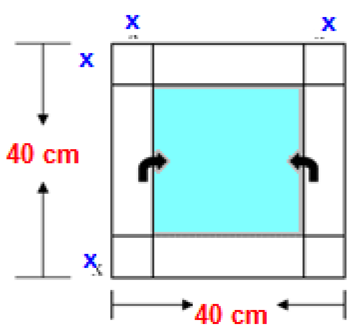
$$S'(r)=\frac{-32\pi}{r^2}+4\pi r \Rightarrow S'(r)=\frac{-32\pi+4\pi r^3}{r^2}; si: S'(r)=0 \Rightarrow 4\pi r^3=32\pi \Rightarrow r^3=8 \Rightarrow r=2(v.c.)$$

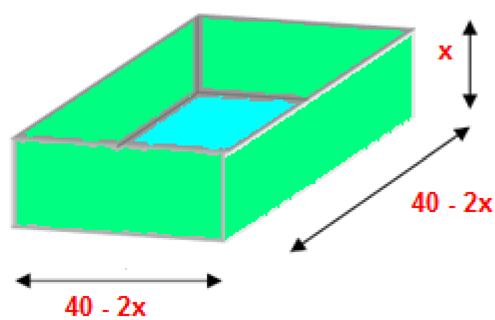
$$S''(r)=\frac{64\pi}{r^3}+4\pi \Rightarrow sust.v.c. \Rightarrow S''(2)=\frac{64\pi}{(2)^3}+4\pi>0 \Rightarrow r=2 \exists\ mínimo \Rightarrow h=4$$

36) Se desean construir cajas de cartón sin tapa partiendo de cuadrados de lado 40 cm. a los que se les recortan las esquinas como indica la figura y doblando a lo largo de las líneas punteadas.

a) Determina la longitud x de los recortes para que el volumen de la caja sea máximo.

b) Determina el volumen máximo





$$Base\ un\ cuadrado\ de\ lado: (40-2x)\ \ y\ la\ altura\ (x) \Rightarrow V(x)=(40-2x)^2 x; dom:[0,20]$$

$$\frac{dV}{dx}=2(40-2x)(-2)x+(40-2x)^2 \Rightarrow \frac{dV}{dx}=(40-2x)(-6x+40) \Rightarrow \frac{dV}{dx}=0 \Rightarrow x=20;\ x=\frac{20}{3}(v.c.)$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=8(3x-40) \Rightarrow sust.\ v.c.\ \frac{d^2V}{dx^2}=8(3(\tfrac{20}{3})-40)=-160<0 \exists\ máximo$$

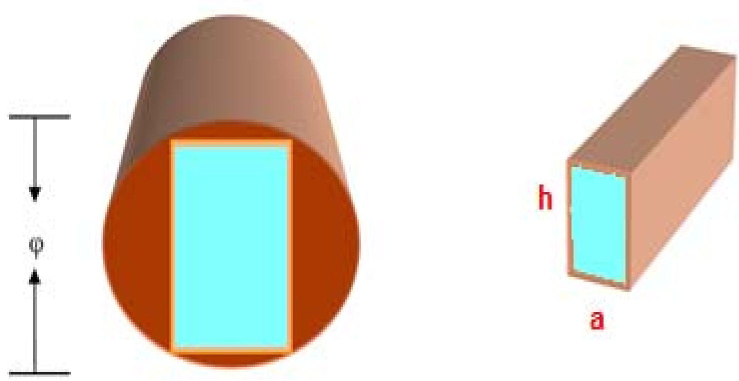
$$v_{máx}=\left(40-2(\tfrac{20}{3})\right)^2(\tfrac{20}{3}) \cong 4{,}74.10^3 cm^3$$

37) La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su ancho a por el cuadrado de su altura h.

a) **Calcula las dimensiones de la viga de máxima resistencia que puede aserrarse de un tronco de madera de forma cilíndrica de diámetro Ø dado.**
b) **Aplícalo al caso Ø = 15" (pulgadas)**
c) **Si el tronco tiene largo L expresa en porcentaje del volumen total de madera el**

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

d) volumen de la viga.



$a)Sea:\ R\ la\ resistencia\ de\ la\ viga\ y\ k\ >0\ una\ cte \Rightarrow R = kah^2$

$\triangle\ \widehat{ABC} \Rightarrow \Phi^2 - a^2 = h^2 \Rightarrow R(a) = ka(\Phi^2 - a^2); \quad 0 \le a \le \Phi$

$$\frac{dR}{da} = k(\Phi^2 - 3a^2) \Rightarrow \frac{dR}{da} = 0 \Rightarrow \ a = \frac{\phi}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\phi \ \cong\ 0.577\phi(v.c.)$$

$$\frac{d^2R}{da^2} = -6ka \Rightarrow sust.v.c.\ \frac{d^2R}{da^2} = -6k(\frac{\phi}{\sqrt{3}}) < 0 \Rightarrow en\ x = \frac{\phi}{\sqrt{3}} \exists\, máximo$$

$$si\ x = \frac{\phi}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2}{3}}\phi \ \cong\ 0.816\phi$$

$b)\ Si\ \Phi = 15'' \cong 38cm \Rightarrow a \cong 8.65'' \cong\ 22cm;\ \ h\ \cong\ 12,24'' \cong\ 31cm$

$$c)\ El\ volumen\ del\ trono\ cilíndrico\ de\ londitud\ L\ será: V = \pi\frac{\phi^2}{4}L$$

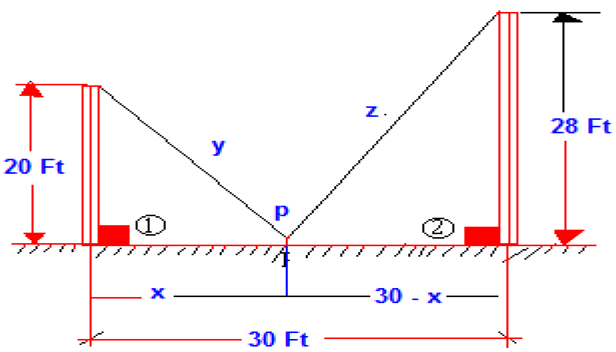
$$El\ volumen\ de\ la\ viga\ de\ longitud\ L\ será: V_1 = ahL \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{ahL}{\pi(\frac{\phi^2}{4})L} = \frac{4ah}{\pi\phi^2}\ \cong\ 0.6$$

$\%\ de\ madera\ utilizada\ en\ la\ viga\ es\ \ 60\%\ de\ la\ madera\ total.$

38) Dos postes de 20 y 28 pies de altura respectivamente se encuentran a 30 pies de distancia. Se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

extremos de los puntos. ¿Dónde se han de fijar los cables para que la cantidad de cable a emplear sea mínima?



Sea W longitud del cable: $W = y + z$

Del Triangulo 1: $y^2 = x^2 + 400 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 400} \quad Ec_1$

Del Triángulo 2: $z^2 = (30-x)^2 + (28)^2 \Rightarrow z = \sqrt{(30-x)^2 + 784} \Rightarrow z = \sqrt{x^2 - 60x + 1684} \quad Ec_2$

$\Rightarrow w(x) = \sqrt{x^2 + 400} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684}$; *Siempre que*: $0 \le x \le 30$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 400}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1684}} \Rightarrow \frac{dw}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 400}} + \frac{(x - 30)}{\sqrt{x^2 - 60x + 1684}}$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1684} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 400}}{\left(\sqrt{x^2 + 400}\right)\left(\sqrt{x^2 - 60x + 1684}\right)}$$

$$\frac{dw}{dx} = 0 \Rightarrow x\sqrt{x^2 - 60x + 1684} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 400} = 0$$

$$\left[x\sqrt{x^2 - 60x + 1684}\right]^2 = \left[(x-30)\sqrt{x^2 + 400}\right]^2 \Rightarrow x^2\left(x^2 - 60x + 1684\right) = (x-30)^2\left(x^2 + 400\right)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1684x^2 = \left[900 - 60x + x^2\right]\left(x^2 + 400\right)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1684x^2 = 900x^2 - 60x^3 + x^4 + 360.000 - 24000x + 400x^2$$

$$x^4 - 60x^3 + 1684x^2 = 1300x^2 - 60x^3 + x^4 - 24000x + 360.000$$

$$1684x^2 = 1300x^2 - 24000x + 360000$$

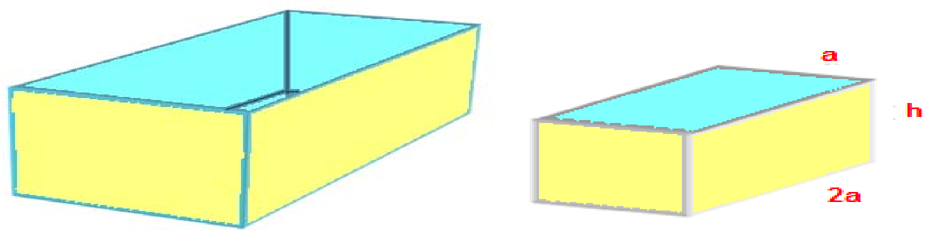
$$(384x^2 + 24.000x - 360.000 = 0)/192 \Rightarrow 2x^2 + 125x - 1875 = 0$$

$$(x+75)(2x-25) = 0 \Rightarrow x = -75 \quad ó \quad x = 12.5$$

Como $x = -75 \notin en[0,30]$ *y los extremos son soluciones factibles* $x = (12.5\ v.c.)$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

39) Se desea construir un tanque con forma de paralelepípedo rectangular de 45 m^3 de volumen, con la parte superior abierta según indica la figura. El largo del rectángulo base debe ser doble del ancho. El material de la base tiene un costo de 100 $\frac{\$}{m2}$ y el de las paredes de 80 $\frac{\$}{m2}$. Determina las dimensiones del recipiente para que el costo de los materiales sea mínimo, así como el correspondiente precio del tanque.



$$El\ \text{costo del tanque}: C_T = C_{base} + C_{sup.lat.}$$

$$El\ \text{costo del material de la base será}: C_{base} = 100.Sup_{base} = 100(2)a^2 \Rightarrow C_{base} = 200\,a^2$$

$$\text{Costo de la superficie lateral}: C_{lat} = 80S_{lat} = 80(6ah) \Rightarrow C_{lat} = 480ah$$

$$C_T = 200a^2 + 480ah;\ como: V_T = 45m^3 \Rightarrow V_T = a2ah \Rightarrow V_T = 2a^2h \Rightarrow 2a^2h = 45 \Rightarrow h = \frac{45}{2a^2}$$

$$C_T(a) = 200a^2 + \frac{10800}{a};\quad donde: a > 0 \Rightarrow \frac{dC_T}{da} = 400a - \frac{10800}{a^2}$$

$$\frac{dC_T}{da} = 0 \Rightarrow 400a^3 - 10800 = 0 \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{10800}{400}} \Rightarrow\ a = \sqrt[3]{27} = 3(v.c.)$$

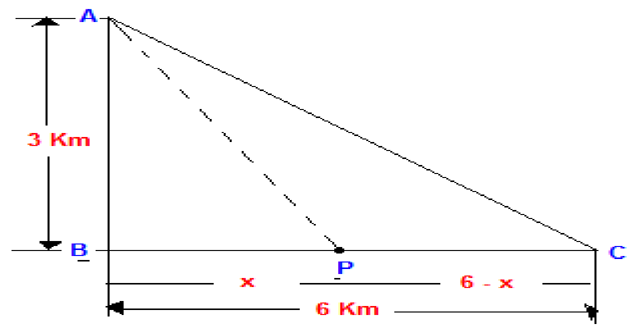
$$\frac{d^2C_T}{da^2} = 400 + \frac{21600}{a^3} \Rightarrow sust\,v.c.\frac{d^2C_T}{da^2} = 400 + \frac{21600}{(3)^3} > 0 \Rightarrow a = 3 \exists\ un\ mínimo$$

$$si: a = 3 \Rightarrow h = 2.5\,m \Rightarrow Las\ \text{dimensiones}: a = 3m,\ h = 2.5m,\ L = 6m.;\ C_T(3) = \$5400.$$

40) Los Puntos A y B están opuestos uno al otro y separados por el mar 3 Km. El punto C está en la misma orilla que B y 6 Km a su derecha. Una compañía de teléfonos desea

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

tender un cable de A a C. Si el costo por km de cable es 25% más caro bajo el agua que en tierra. ¿Qué línea de cable sería menos costosa para la compañía?



$\overline{AP}$ = *Cantidad de cable bajo el agua.*; $\Rightarrow \triangle \widehat{ABP} \Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{x^2+9}$

$\overline{PC}$ = *Cantidad de cable por tierra.* $\Rightarrow \overline{PC} = 6 - x$

$\underline{P}$ = *Punto cualquiera entre* $\overline{BC}$.; *donde* $0 \le x \le 6$

Si a = costo *en . De cada km de cable bajo tierra*

b = costo *en Bs. De cada km de cable por tierra.*

$$a = b + \frac{25b}{100} \Rightarrow a = b + \frac{b}{4} \Rightarrow a = \frac{5b}{4} \Rightarrow b = \frac{4a}{5}$$

El costo de cable bajo el agua: $a\sqrt{x^2+9}$; *El costo de cable por tierra*: $b(6-x)$

$$\text{El costo total: } C(x) = a\sqrt{x^2+9} + b(6-x) \Rightarrow C(x) = a\sqrt{x^2+9} + \frac{4a}{5}(6-x)$$

$$C'(x) = a\left[\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} - \frac{4}{5}\right] \Rightarrow C'(x) = a\left[\frac{5x - 4\sqrt{x^2+9}}{5\sqrt{x^2+9}}\right]$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 5x - 4\sqrt{x^2+9} = 0 \Rightarrow [5x]^2 = \left[4\sqrt{x^2+9}\right]^2 \Rightarrow 25x^2 = 16\left(x^2+9\right)$$

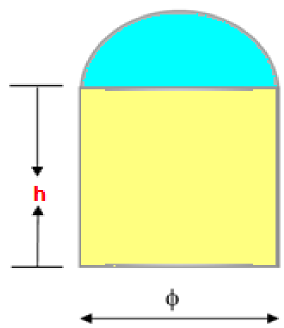
$$25x^2 = 16x^2 + 144 \Rightarrow 9x^2 = 144 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow x = 4\ (v.c.) \in [0,6]$$

$$C(0) = \frac{39}{5}a;\quad C(6) = 3a\sqrt{5};\quad C(4) = \frac{33}{5}(a) \Rightarrow \text{El valor menor es cuando } x = 4$$

$$\text{O también } C''(x) = a\left[\frac{\left(x^2+9\right)^{1/2} - x\left(x^2+9\right)^{-1/2}(2x)}{\left(x^2+9\right)}\right] \Rightarrow C''(x) = 9a\left[\frac{\left(x^2+9\right)^{1/2}}{\left(x^2+9\right)}\right]$$

$$C''(x) = \frac{9a}{\sqrt{\left(x^2+9\right)}} \Rightarrow C''(4) > 0\ \exists\ \text{mínimo}$$

41) Se desea construir un silo de forma cilíndrica rematado por una bóveda semiesférica. El costo de construcción por m² es doble en la bóveda que en la parte cilíndrica. Encuentra las dimensiones h y Ø del silo de volumen V dado, de forma que el costo de construcción sea mínimo.



Sea: *R radio de la base; h la altura de la parte cilindrica.*

$Sup.\ lateral = 2\pi Rh;\quad Sup.\ boveda = 2\pi R^2$

$Costo\ de\ Sup\ lateral: A\,(\frac{\$}{m^2});\quad Costo\ de\ boveda: 2A(\frac{\$}{m^2}) \Rightarrow$

$C_T = 2\pi RhA + 2\pi R^2(2A) \Rightarrow C_T = 2\pi AR(2R+h)$

$$si\ V\ es\ volumen\ dado: V = \pi R^2 h + \frac{4\pi R^3}{6} \Rightarrow h = \frac{V - \frac{2\pi R^3}{3}}{\pi R^2} \Rightarrow h = \frac{3v - 2\pi R^3}{3\pi R^2}$$

$$C_T(R) = 2A\left(\frac{4\pi R^3 + 3V}{3R}\right) \Rightarrow \frac{dC_T}{dR} = 2A\left(\frac{8\pi R^3 - 3v}{3R^2}\right) \Rightarrow \frac{dC_T}{dR} = 0 \Rightarrow -3V + 8\pi R^3 = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}}(v.c.)$$

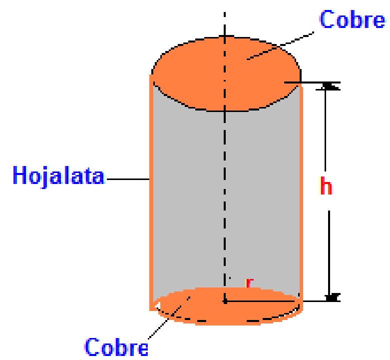
$$\frac{d^2C_T}{dR^2} = \left(\frac{4A(4\pi R^3 + 3v)}{3R^3}\right) \Rightarrow sust.\ v.c.\ \frac{d^2C_T}{dR^2} > 0\ \exists(mínimo)$$

$$Como\ \phi = 2R \Rightarrow \phi = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}} \Rightarrow h = \frac{V - \frac{2}{3}\pi R^3}{\pi R^2} \Rightarrow h = \frac{V - \frac{2}{3}\pi\frac{3V}{8\pi}}{\pi\sqrt[3]{\frac{9V^2}{64\pi^2}}}$$

42) Se va a construir un calentador para agua en el forma de un cilindro circular recto con eje vertical, usando para ello una base de cobre y lados de hojalata; si el cobre

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

cuesta 5 veces lo que la hojalata. Calcule la razón se la altura al radio r, que hará que el costo sea mínimo cuando el volumen V es constante.



$$Sean: r = Radio\ ; h = Altura\ ; V = Volumen,\ del\ cilindro \Rightarrow V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$C_T = C_{tapas} + C_{lados} \Rightarrow si: a_{cilindro} = 2\pi r h;\ a_{círculo} = \pi r^2,\ además\ a\ el\ Costo\ del\ material$$

$$C_{tapas\,(cobre)} = 5a\left[2\pi r^2\right];\quad C_{lados(hojalata)} = a\left[2\pi rh\right] \Rightarrow C_T = 5a\left[2\pi r^2\right] + a\left[2\pi rh\right]$$

$$sust.\ h \Rightarrow C(r) = 10a\pi r^2 + 2a\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}\right) \Rightarrow C(r) = 10a\pi r^2 + 2a\left(\frac{V}{r}\right) \Rightarrow C(r) = 2a\left[5\pi r^2 + \frac{V}{r}\right]$$

$$C'(r) = 2a\left[10\pi r - \frac{V}{r^2}\right] \Rightarrow C'(r) = 2a\left[\frac{10\pi r^3 - V}{r^2}\right] \Rightarrow si: C'(r) = 0 \Rightarrow 10\pi r^3 - V = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{r^3}}\,(v.c.)$$

$$C''(r) = 2a\left[10\pi + \frac{2V}{r^3}\right] \Rightarrow C''(r) = 4a\left[5\pi + \frac{V}{r^3}\right] \Rightarrow sust.\ v.c. \Rightarrow C''\left[\sqrt[3]{\tfrac{V}{10\pi}}\right] = 4a\left[5\pi + \frac{V}{\left(\sqrt[3]{\tfrac{V}{10\pi}}\right)^3}\right]$$

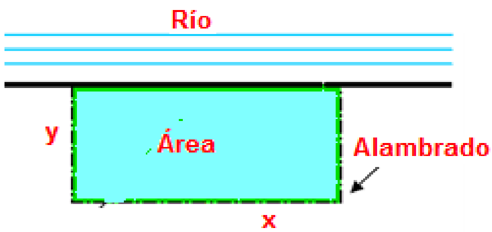
$$C''\left[\sqrt[3]{\tfrac{V}{10\pi}}\right] = 4a\left[5\pi + \frac{10\pi V}{V}\right] \Rightarrow C''\left[\sqrt[3]{\tfrac{V}{10\pi}}\right] = 4a\left[15\pi\right] \Rightarrow C''\left[\sqrt[3]{\tfrac{V}{10\pi}}\right] = 60\pi a > 0 \therefore \exists\ mínimo.$$

$$si: r = \sqrt[3]{\tfrac{V}{10\pi}} \Rightarrow h = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\tfrac{V}{10\pi}}\right)^2}$$

43) Sobre la ribera de un río cuya orilla se supone rectilínea se desea alambrar una superficie rectangular de 10 hectáreas. Admitiendo que el costo de alambrado es proporcional a la longitud a alambrar, dimensionar el rectángulo para que el costo de alambramiento sea mínimo. Se supone que no se alambra sobre la ribera. Recuerda que

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

1 hectárea = 10.000 m2. Si el alambrado se construye con 5 hilos y el rollo de 1.000 m vale U$S 35. Calcula además el costo del alambre necesario.





$Sea:\ L\ a\ su\ longitud\ (m) \Rightarrow L = x + 2y;\ y\ A\ el\ área \Rightarrow A = xy \Rightarrow y = \frac{A}{x} \Rightarrow L(x) = x + \frac{A}{x};\ x \geq 0$

$\frac{dL}{dx} = 1 - \frac{2A}{x^2} \Rightarrow \frac{dL}{dx} = \frac{x^2 - 2A}{x^2} \Rightarrow \frac{dL}{dx} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2A}(v.c.)$

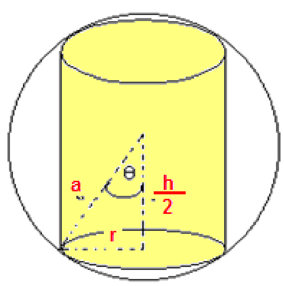
$\frac{d^2L}{dx^2} = \frac{4A}{x^3} \Rightarrow sust.(v.c.) \Rightarrow \frac{d^2L}{dx^2} > 0 \Rightarrow \exists mínimo \Rightarrow si: x = \sqrt{2A} \Rightarrow y = \frac{A}{\sqrt{2A}} = \frac{\sqrt{2A}}{2}$

$como:\ 1 Hectaria = 10000\ m^2 \Rightarrow x \cong\ 447,20\ m;\ y \cong 223,60\ m;\ L = 894,40\ m$

$Además,\ el\ alambrado\ debe\ tener\ 5\ hilos, \Rightarrow L_{total} = 4472\ m$

$y\ el\ costo\ total\ de\ alambre\ es\ de\ U\$S\ 156,52.$

44) Un cilindro circular recto va a ser inscrito en una esfera con determinado radio. Calcular la razón de la altura del radio de la base del cilindro que tenga la mayor área de superficie lateral.



$Sean:\ \theta\ el\ ángulo\ al\ centro\ de\ las\ esferas,\ r: radio\ del\ cilindro;\ h: altura$

$S:\ S = 2\pi rh: áreas\ de\ la\ superficie\ lateral\ del\ cilindro.$

$De\ la\ figura: r = a sen\theta;\ h = 2a\cos\theta \Rightarrow S = 2\pi\left(a sen\theta\right)\left(2a\cos\theta\right) \Rightarrow$

$S(\theta) = 4\pi a^2\left(sen\theta\cos\ \theta\right); Dom\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

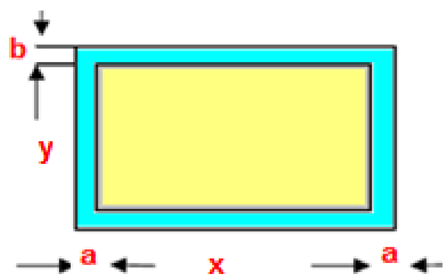
damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$\frac{dS}{d\theta} = 4\pi a^2(2\cos^2\theta - 1) \Rightarrow \frac{dS}{d\theta} = 0 \Rightarrow 2\cos^2\theta - 1 = 0 \Rightarrow \theta = \tfrac{\pi}{4}(v.c.) \in Dom\left(0, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2S}{d\theta^2} = -16\pi a^2 sen\theta\cos\theta \Rightarrow \frac{d^2S}{d\theta^2} = -8\pi a^2 sen2\theta; sust.\ v.c.\ \frac{d^2S}{d\theta^2} = -8\pi a^2 < 0 \exists máximo$$

$$r = asen(\tfrac{\pi}{4}) \Rightarrow r = \tfrac{a\sqrt{2}}{2}; \quad h = 2a\cos(\tfrac{\pi}{4}) \Rightarrow h = \tfrac{2a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{h}{r} = 2(razón\ buscada)$$

45) Una fábrica necesita una superficie de piso de forma rectangular y área A m^2 para carga de materiales. Para cerrar esa superficie se construirán paredes de espesores fijos de a metros y b metros como indica la figura.



Dimensiona el rectángulo de carga para que la superficie rectangular exterior necesaria sea mínima.

Sea: x *e* y *los lados del rectángulo, de área A*; a, b: *los espesores de las paredes.*

Los lados del rectángulo exterior: $(x+2a)$ *e* $(y + 2b)$ *y su área* $S: S = (x+2a)(y+2b)$

$$además: A = xy \Rightarrow y = \frac{A}{x} \Rightarrow S(x) = (x+2a)\left(\frac{A}{x} + 2b\right); Donde:\ x > 0$$

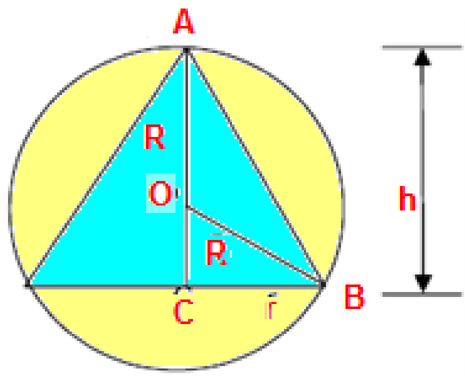
$$\frac{dS}{dx} = \left(\frac{A}{x} + 2b\right) + (x+2a)\left(-\frac{A}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{dS}{dx} = \frac{2bx^2 - 2aA}{x^2} \Rightarrow \frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{aA}{b}}(v.c.)$$

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{4aA}{x^3} \Rightarrow sust.\ v.c. \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{4aA}{\sqrt{(\frac{aA}{b})^3}} > 0 \Rightarrow \exists mínimo \Rightarrow si: x = \sqrt{\frac{aA}{b}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{b}{a}A}$$

se deduce que: *si* $(a = b)$ *el rectángulo de carga y el rectángulo exterior serán cuadrados.*

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

46) Encuentra las dimensiones r y h del cono recto de base circular de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio R dado.



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \text{ volumen del cono}$$

El cono de volumen maximo debe tener su base en la semiesfera inferior pues todo cono tiene otro con base simetrica respecto al plano diametral de la esfera ^AC, en la semiesfera superior, pero de menor altura, lo que permite variar h en [R , 2R]

$$Del\ triángulo\ OCB \Rightarrow R^2 = (h-R)^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - (h-R)^2 \Rightarrow r^2 = 2hR - h^2$$

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\left[2hR - h^2\right]h \Rightarrow V(h) = \frac{\pi}{3}\left(2Rh^2 - h^3\right); Donde: \ R \le h \le 2R$$

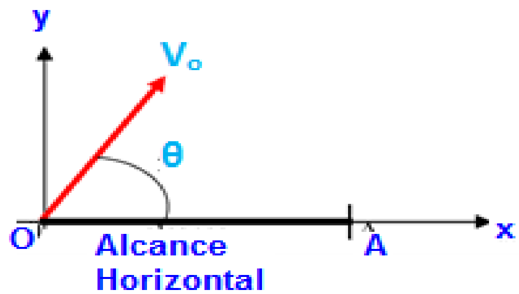
$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}\left(4Rh - 3h^2\right) \Rightarrow si: \frac{dV}{dh} = 0 \Rightarrow h = 0; \quad h = \frac{4R}{3}(v.c.)$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = \frac{\pi}{3}\left(4R - 6h\right) \Rightarrow sust\, v.c. \frac{d^2V}{dh^2} = \frac{\pi}{3}\left(4R - 6(\tfrac{4R}{3})\right) < 0 \exists máximo \Rightarrow si: h = \frac{4R}{3} \Rightarrow r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$$

47) Se lanza un proyectil en el vacio desde un punto 0 (ver figura) con velocidad V_o y ángulo de inclinación θ. En el sistema (XOY) indica, la trayectoria del proyectil responde a la función: $Y(x) = \frac{-g}{2V_0^2 . cos^2\theta} . x^2 + (tg\theta)x$; $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; $g = 9.8\,\frac{m}{s^2}$; a) Para V_o y θ dadas, encuentra la altura máxima ($h_{máx}$) que alcanza el proyectil. b) Calcula el

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

alcance L del proyectil y suponiendo V_o constante, indicando el valor θ_o que da máximo alcance.



$$a)\ y(x)=\frac{-g}{2V_o^2\cos^2\theta}x^2+(tg\theta)x;\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}; Siendo\ v_0\ y\ \theta\ const$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-g}{V_o^2\cos^2\theta}x+tg\theta\Rightarrow\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{g}{V_o^2\cos^2\theta}x=tg\theta\Rightarrow x=\frac{V_o^2(sen\theta\cos\theta)}{g}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-g}{V_o^2\cos^2\theta}<0\Rightarrow\exists\ máximo$$

$$y_{máx}=\frac{-g}{2V_o^2\cos^2\theta}\left(\frac{V_o^4sen^2\theta\ \cos^2\theta}{g^2}\right)+tg\theta\left(\frac{V_o^2\ sen\theta\ \cos\theta}{g}\right)\Rightarrow y_{máx}=\frac{V_o^2\ sen^2\theta}{2g}$$

$$b) Sea\ L\ alcance\Rightarrow L=2x\Rightarrow\ L\ =\ 2(\tfrac{V_o^2}{g}sen\theta\ \cos\theta)\Rightarrow L(\theta)=\frac{V_o^2}{g}\ sen(2\theta); Para:\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dL}{d\theta}=\frac{V_o^2}{g}\cos(2\theta)2\Rightarrow\frac{dL}{d\theta}=\frac{2V_o^2\cos(2\theta)}{g}\Rightarrow si:\ \frac{dL}{d\theta}=0\Rightarrow\cos(2\theta)=0\Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{4}(\text{v.c.})$$

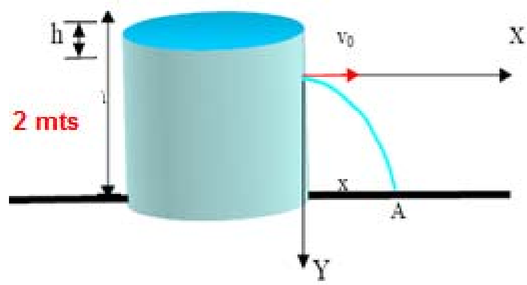
$$\frac{d^2L}{d\theta^2}=\frac{-4V_o^2\,sen(2\theta)}{g}\Rightarrow sust.v.c.\Rightarrow\frac{d^2L}{d\theta^2}=\frac{-4V_o^2\,sen(2(\frac{\pi}{4}))}{g}=-\frac{4V_o^2}{g}<0\Rightarrow\exists máximo$$

$$en:\theta=\frac{\pi}{4}$$

48) Un tanque de 2 m. de altura apoyado en el piso se mantiene lleno de agua mientras que por un orificio practicado en una de sus paredes escapa un chorro que golpea el piso en el punto A, a una distancia x de la pared. Admite que el chorro tiene forma parabólica y que en el sistema (XY) indicado su ecuación es: Y = $\frac{g}{2.V_o^2}.x^2$, Donde V_o es la velocidad del chorro a la salida del orificio y g la aceleración de la gravedad. Sabiendo que $V_o=\sqrt{2.g.h}$, se pide que determines la profundidad h a que

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

debe encontrarse el orificio para que el chorro golpee el piso a máxima distancia del tanque.



$$Dada: y=\frac{gx^2}{2V_o^2};\ de\ la\ Fig.\ el\ punto\ A es:\ A\ (x,2-h)\Rightarrow 2-h=\frac{gx^2}{2V_o^2}$$

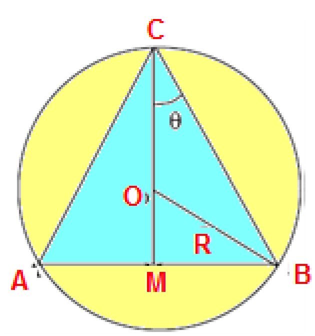
$$la\ velocidad\ de\ salida\ del\ líquido\ (V_0):\ V^2{}_0=2gh\Rightarrow 2-h=\frac{gx^2}{2(2gh)}\Rightarrow 2-h=\frac{x^2}{4h}$$

$$x^2=4h(2-h)\Rightarrow x(h)=2\sqrt{2h-h^2}\quad Donde:\ \ x\geq 0;\ \ 0\leq h\leq 2$$

$$\frac{dx}{dh}=\frac{2(1-h)}{\sqrt{h(2-h)}}\Rightarrow si\ \frac{dx}{dh}=0\Rightarrow h=1(v.c.)$$

$$\frac{d^2x}{dh^2}=\frac{-2}{\sqrt{(h(2-h))^3}}<0\Rightarrow en\ h=1\exists\ máximo\Rightarrow x(h)=2\sqrt{2h-h^2}\Rightarrow x=2$$

49) Considera una circunferencia de radio R dado. Se inscriben en ella triángulos isósceles ABC. a) Calcula el perímetro de los triángulos en función del ángulo θ. b) Halla el triangulo de perímetro máximo.



$$a.)\ sea\ p\ el\ perimetro\ \triangle ABC.$$

$$Del:\triangle\ OMB:\ \measuredangle\ MOB=2\theta\ \ (ángulo\ central\ e\ inscrito\ correspondientes)$$

$$\Rightarrow MB=R\ sen(2\theta)\Rightarrow AB=2(R\ sen\ (2\theta))$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$\measuredangle CMB: BC = \frac{MB}{sen\ \theta} = \frac{Rsen\ (2\theta)}{sen\ \theta} \Rightarrow BC = \frac{2Rsen(2\theta)}{sen\ \theta} \Rightarrow BC = 2R\cos(\theta)$$

$$p(\theta) = 2Rsen(2\theta) + 2(2R\cos\theta) \Rightarrow p(\theta) = 2R\left(sen(2\theta) + 2\cos\theta\right) \Rightarrow p(\theta) = 4R\cos\theta\left(1 + sen\theta\right)$$

$$b.)\frac{dp}{d\theta} = 4R\left[-sen\ \theta\left(sen\theta + 1\right) + \cos\theta\cos\theta\right] \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = 4R\left(\cos^2\theta - sen^2\theta - sen\ \theta\right) Para:\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dp}{d\theta} = 4R\left(-2sen^2\theta - sen\ \theta + 1\right);\ si\ \frac{dp}{d\theta} = 0 \Rightarrow -2sen^2\theta - sen\ \theta + 1 = 0 \Rightarrow sen\ \theta = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4}$$

$$sen\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}(v.c.)en\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^2p}{d\theta^2} = -12R\cos\theta \Rightarrow sust.\ v.c.\ \frac{d^2p}{d\theta^2} = -12R\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = -6R\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \exists máximo$$

$$p\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = 4R\ \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\left(sen\left(\tfrac{\pi}{6}\right) + 1\right) = 3\sqrt{3}R \Rightarrow El\ triángulo\ es\ equilátero.$$

50) Un generador de fuerza electromotriz constante ε y resistencia interna r se conecta a una resistencia de carga R. en esas condiciones la potencia P disipada por la resistencia R esta expresada por la relación: P = $\frac{R\,.\varepsilon^2}{(R+r)^2}$, R y r en Ω, V en voltios. Determine el valor de R en función de r para que la potencia sea máxima.

$$P(R) = \frac{R\varepsilon^2}{(R+r)^2} \Rightarrow \frac{dP}{dR} = \varepsilon^2\left[\frac{(R+r)^2 - R.2(R+r)}{(R+r)^4}\right] \Rightarrow \frac{dP}{dR} = \varepsilon^2\frac{\left(-R^2 + r^2\right)}{(R+r)^4}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow\ -R^2 + r^2 = 0 \Rightarrow R = r(v.c.)$$

$$\frac{d^2P}{dR^2} = \frac{2\varepsilon^2(R - 2r)}{(R+r)^4} \Rightarrow sust.v.c.\frac{d^2P}{dR^2} = \frac{2\varepsilon^2(R - 2R)}{(R+R)^4} < 0 \Rightarrow \exists máximo \Rightarrow P_{máx} = \frac{\varepsilon^2}{4R}$$

51) Determine los valores de las constantes a, b, y c para la curva $y = \frac{ax}{b + cx^2}$ **presente extremos relativos en** $\left(1, -\frac{1}{2}\right)\ y\ \left(1, \frac{1}{2}\right)$

La derivada correspondiente a la función objeto de estudio está dada por: $y' = \frac{a\left(b - cx^2\right)}{\left(b + cx^2\right)^2}$.

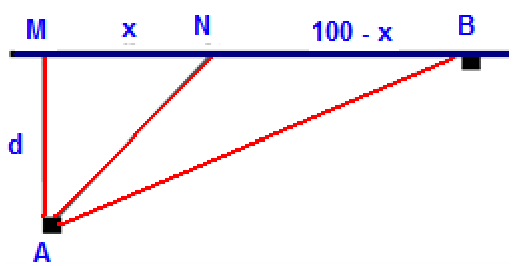
La existencia de extremos relativos en $x = \pm 1$ indica que en este par de valores $y' = 0$, esto es, $a(b - c) = 0$. De aquí, $a = 0,\ o\ \ b = c$. De acá sólo es admisible b = c. Como los puntos dados satisfacen la ecuación dada y usando la última relación obtenida, se tiene:

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$-\frac{a}{b+c}=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2b}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow a = b.$$

De esta forma, si $a = b = c$, la ecuación en cuestión se puede escribir como $y=\frac{ax}{a+ax^2}=\frac{ax}{a\left(1+x^2\right)}=\frac{x}{1+x^2}$. Por lo tanto, es irrelevante el valor de a, lo verdaderamente importante es la relación obtenida entre las constantes.

52) Un vehículo debe trasladarse desde el punto A hasta el punto B de la figura. El punto A dista 36 Km de una carretera rectilínea. Sobre la carretera el vehículo puede desarrollar una velocidad de 100 $\frac{Km}{h}$, mientras que sobre el terreno puede desarrollar una velocidad de 80 $\frac{Km}{h}$. a) Se desea saber cual es el recorrido que debe realizar el conducto para que el tiempo empleado en ir desde A hasta B sea mínimo. b) Calcula ese tiempo.



$$sea: v_1 = 80\tfrac{km}{h}\ \ rapidez\ en\ el\ terreno,\ v_2 = 100\tfrac{km}{h}\ \ rapidez\ en\ la\, carretera.$$

$$MN = d_{MN} = x,\ \ NB = d_{NB} = 100 - x,\ \ d_{AM} = d = 36km$$

$$Del \measuredangle AMN:\ d_{AN} = \sqrt{d^2 + x^2}$$

$$Por\ M.R.U.\ t_{AN} = \frac{\sqrt{d^2+x^2}}{v_1};\ \ t_{NB} = \frac{100-x}{v_2} \Rightarrow t\left(x\right) = \frac{\sqrt{d^2+x^2}}{v_1} + \frac{100-x}{v_2};\ [0,100]$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{d^2+x^2}} - \frac{1}{v_2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{d^2+x^2}} - \frac{1}{v_2} = 0 \Rightarrow v_2 x = v_1\sqrt{d^2+x^2}$$

$$v_2^2x^2 - v_1^2x^2 = d^2v_1^2 \Rightarrow x^2 = \frac{d^2v_1^2}{v_2^2-v_1^2} \Rightarrow x = \frac{\pm dv_1}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}} \Rightarrow x = \frac{(36)(80)}{\sqrt{(100)^2-(80)^2}} \Rightarrow x = 48(v.c.)$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{d^2}{v_1\sqrt{(d^2+x^2)^3}} \Rightarrow sust.v.c. \frac{d^2t}{dx^2} > 0 \Rightarrow \exists\, mínimo\, en\ x = 48$$

$$b.)\ El\ tiempo\ de\ recorrido\ sera:\ t = 1h\ 16m$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

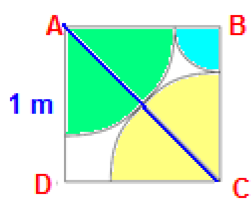
53) Demuestre que la curva de ecuación $y = \frac{a}{x} - x^2$ no tiene mínimo relativo para ningún valor de a.

El dominio de la curva está dado por, $R - \{0\}$. De donde existe una asíntota vertical en $x = 0$,

$$y' = \frac{-(a + 2x^3)}{x^2} \Rightarrow si\ y' = 0 \Rightarrow a + 2x^3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2}}(v.c)$$

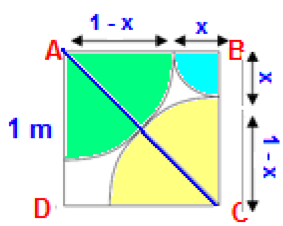
$$y'' = \frac{2a}{x^3} - 2 \Rightarrow y'' = \frac{2(a - x^3)}{x^3} \Rightarrow sust\ v.c. \Rightarrow y'' = \frac{2\left[a - \left(-\frac{a}{2}\right)\right]}{-\frac{a}{2}} = -6 < 0 \Rightarrow máximo\ en\ x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$$

54) Se considera un cuadrado de lado 1 m. En tres vértices consecutivos, de él se toman los centros de tres circunferencias de forma que los radios de las que tienen centros en vértices consecutivos, sumen 1 m. a) Encuentra los valores extremos de los radios de forma que los cuadrantes de círculo sombreados no se solapen. b) calcular los radios de las circunferencias para que el área sombreada sea mínima. c) calcula dicha área.



a.) Como los círculos de centros A y C son de igual radio x, el máximo valor para que aquellos no se solapen será, la mitad de la diagonal del cuadrado.

$$siendo\ el\ lado\ L\ del\ cuadrado\ de\ 1m: \Rightarrow x_{máx} = \frac{\sqrt{2}L}{2} \Rightarrow x_{máx} = \frac{\sqrt{2}}{2}m$$



damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

b.)El área a considerar se compone de dos cuadrantes de círculo de radio x y un cuadrante de radio $1-x \Rightarrow A(x) = 2\left(\frac{\pi x^2}{4}\right)+\frac{1}{4}\pi(1-x)^2$

$$A(x)=\frac{3\pi x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow A(x)=\frac{\pi}{4}\left(3x^2-2x+1\right);\left[0,\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\frac{dA}{dx}=\frac{\pi}{4}(6x-2) \Rightarrow \frac{dA}{dx}=0 \Rightarrow 6x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}(\text{v.c.})$$

$$\frac{d^2A}{dx^2}=\frac{6\pi}{4} \Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2}=\frac{3\pi}{2}>0 \Rightarrow \exists\, mínimo\ en\ x=\frac{1}{3}$$

c.) área mínima será $A_{\min} = \frac{\pi}{6}$

55) Calcule los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la curva de ecuación $y=ax^3+bx^2+cx+d$ **tiene extremos relativos en** $\left(-1,\ \frac{11}{2}\right)$ y $(2,\ -8)$**.**

De $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Usando los hechos de que los puntos dados satisfacen la ecuación de la curva y que $y' = 0$ en $x = -1$ y $x = 2$, se tiene el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} -a + b - + d = \frac{11}{2} & (1) \\ 8a + 4b + 2c + d = -8 & (2) \\ 3a - 2b + c = 0 & (3) \\ 12a + 4b + c = 0 & (4) \end{cases}$$

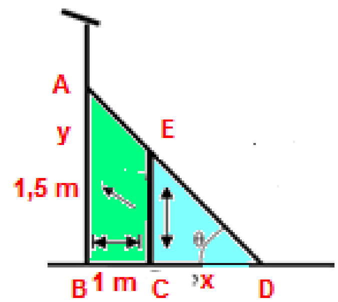
Haciendo (2)-(1), sigue: $3a + b + c = -\frac{9}{2}$ (5). De (5)-(3), queda: $3b = -\frac{9}{2} \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$. a partir de (4)-(3), obtenemos: $3a + 2b = 0 \Rightarrow a = 1$. sustituyendo los valores calculados en (3) y luego en (1), se tiene: $c = -6,\ d = 2$.

55) Se desea colocar una escalera apoyada en el suelo y en la pared de un galpón como se muestra en la figura. Paralelamente a la pared del galpón y a 1 m. de distancia corre una cerca de 1.50 m de altura. La escalera se apoyara también sobre la cerca. a) Calcula la longitud mínima que deberá tener la escalera para cumplir con las condiciones

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

pedidas (se sugiere expresar la longitud de la escalera en función del ángulo que la misma forma con el piso). b) ¿A que altura de la pared del galpón apoyara la escalera?

c) ¿A que distancia de la cerca apoyara la escalera sobre el suelo?



$$Del \measuredangle\ ECD:\ tg\theta = \frac{1.5}{x} \Rightarrow x = 1.5(tg\theta);\ \ Del \measuredangle\ ABD: \cos\theta = \frac{1+x}{L} \Rightarrow L = \frac{1+x}{\cos\theta}$$

$$L = \frac{1 + \frac{1.5}{tg\theta}}{\cos\theta} \Rightarrow L = \frac{1.5 + tg\theta}{sen\theta};\ 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{(\sec^2\theta)sen\theta - (1.5 + tg\theta)\cos\theta}{sen^2\theta} \Rightarrow \frac{dL}{d\theta} = 0 \Rightarrow (1 + tg^2\theta)sen\theta = (1.5 + tg\theta)\cos\theta$$

$$(1 + tg^2\theta)\ tg\theta = tg\theta + 1.5 \Rightarrow tg^3\theta = 1.5 \Rightarrow \theta = Arctg\sqrt[3]{1.5} = 1{,}14 \Rightarrow \theta \cong 0.85\ rad \cong 49^o (v.c.)$$

$$\frac{d^2L}{d\theta^2} = \frac{3\cos^5\theta + 3\cos^3\theta + 2sen^5\theta + 2sen^3\theta}{2sen^3\theta\cos^3\theta} \Rightarrow sust\ v.c.\ \frac{d^2L}{d\theta^2} > 0 \Rightarrow \exists\ mínimo \Rightarrow L_{\min} \cong 3.51\ m$$

$$b.)\ Del\ \measuredangle\ ABD\ La\ altura\ "y"es:\ y = Lsen\theta \cong 2.65\ m$$

$$c.)\ Del \measuredangle\ ECD\ "x"\ es: x\ =\ \frac{1.5}{tg\theta} \cong 1.30\ m$$

56) Determine los valores de a y b en la ecuación $y = \sqrt[3]{2ax^2 + bx^3}$, **asumiendo que la curva en cuestión tiene un extremo relativo en** $\left(4,\ 2\sqrt[3]{4}\right)$, **donde además existe la primera derivada**.

A partir de las coordenadas del punto dado, se tiene:

$$\sqrt[3]{2.4^2\ a\ +\ 4^3.b}\ =\ 2\sqrt[3]{4}\ \Rightarrow\ \sqrt[3]{2.4^2\ (a\ +\ .2b)}\ =\ 2\sqrt[3]{4}\ \Rightarrow\ \sqrt[3]{2^3\ .\ 4(a\ +\ 2b)} = 2\sqrt[3]{4} \Rightarrow a + 2b = 1.$$

Como en $x = 4,\ y' = 0,\ sigue: a + 3b = 0.$ Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones, resulta: $a = 3, b = -1.$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

57) ¿Cuál es la relación que debe existir entre los coeficientes a, b, y c para que la curva $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ pueda tener puntos de inflexión?

$y´ = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \Rightarrow y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c = 2(6ax^2 + 3bx + c)$. La posibilidad de puntos de inflexión se asocia a $y'' = 0$, esto es, $6ax^2 + 3bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - 24ac}}{12a} = \frac{-3b \pm \sqrt{3b^2 - 8ac}}{12a}$, y estos posibles puntos de inflexión existen si $3b^2 - 8ac \geq 0$.

58) Se considera un circuito serie R–L–C, al que se le aplica un voltaje V(t) de variación sinusoidal dada por la expresión: $v(t) = v_0 sen(wt)$ La intensidad I de la corriente que circula por el circuito viene dada por la expresión$I(t) = I_0 sen(wt + \varphi)$, El valor máximo I_o esta dado por la expresión: $I_o = \frac{V_o}{Z}$. Donde Z es la impedancia del circuito y vale: $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C_\omega}\right)^2}$ a) Expresa I_o como función de ω. b) Suponiendo que la función angular ω de la fuente puede variarse, halla el valor de ω que corresponde al máximo valor de I_o. (El valor que hallaras se conoce como "Frecuencia de resonancia")

$$a.)\ I_o = \frac{V_o}{Z};\ como:\ Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \Rightarrow I_o(\omega) = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$b.)$ *Dado que el voltaje V_o es constante, para maximizar Io bastará minimizar el denominador* $\Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C\omega^2 = \frac{1}{L} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \omega > 0 \quad Z_{\min} = \sqrt{R^2} = R$$

59) Dada $f(x) = x^m (1 - x)^n$ donde m y n son enteros positivos mayores que 1, verifique que: a) *f* tiene un valor mínimo relativo en *x = 0*, si *m* es par. b) *f* tiene un valor

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

máximo relativo en $x = \frac{m}{m+n}$, siendo *m* y *n* pares o impares. c) *f* tiene un valor mínimo relativo en *x = 1*, si n es par.

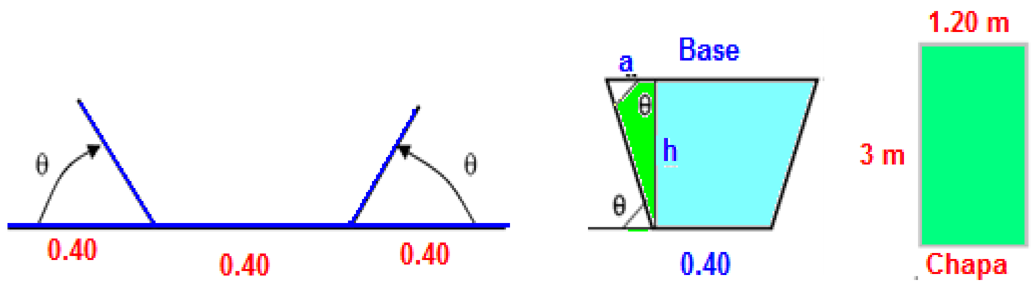
$$f' = mx^{m-1}(1-x)^n + x^m n(1-x)^{n-1}(-1) = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m(1-x)-nx] = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m-(m+n)x]$$

Como puede observarse, $f'=(x)=0,\ si\ \ x=0,\ \ x=1,\ x=\frac{m}{m+n}$. Además, como m y n son enteros positivos mayores que, 1 entonces $m-1>0,\ n-1>0,\ 0<\frac{m}{m+n}<1$. De aquí, podemos construir la siguiente tabla, con un resumen correspondiente a la gráfica en cuestión.

Intervalos	f	f´	Conclusión
$x<0$		-	f es decreciente
$x=0$	$f(0)=0$		Mín. (0,0)
$0<x<\frac{m}{m+n}$		+	f es creciente
$x=\frac{m}{m+n}$	$f\left(\frac{m}{m+n}\right)=\frac{m^m\ n^n}{(m+n)^{m+n}}$		Máx. $\left(\frac{m}{m+m},\frac{m^m\ n^n}{(m+n)^{m+n}}\right)$
$\frac{m}{m+n}<x<1$		-	f es decreciente
$x=1$	$f(1)=0$		Mín. (1,0)
$x>1$		+	f es creciente

60) Se dispone de una chapa metálica de forma rectangular de 1,20 m x 3 m. Se desea construir con ella un bebedero para animales procediendo a doblar la chapa como indica la figura, para formar la superficie lateral y el fondo. Las bases se confeccionan de

madera dura. a) Determina el ángulo θ para que el volumen del bebedero sea máximo. b) Calcula dicho volumen en litros.



$$a.)\ Superficie\ del\ trapecio\ base\ es: S = \frac{0.40+(0.40+2a)}{2}h$$

$$De\ la\ fig.\ sen\theta = \frac{h}{0.40} \Rightarrow h = (0.40)sen\theta;\ \cos\theta = \frac{a}{0.40} \Rightarrow a = 0.40\ \cos\theta$$

$$\Rightarrow sust.\ S(\theta) = \frac{0.40+(0.40+0.80\cos\theta)}{2}(0.40\ sen\theta) \Rightarrow S(\theta) = (0.16+0.16\cos\theta)sen\theta$$

$$Sea:\ V\ volumen\ del\ bebedero \Rightarrow V = SL \Rightarrow pero: L = 3m \Rightarrow$$

$$V(\theta) = 3(0.16+0.16\cos\theta)sen\theta\left(m^3\right); Para: 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 3\left\lfloor -0.16\ sen^2\theta + (0.16+0.16\ \cos\theta)\cos\theta \right\rfloor \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = 3(0.16)\left\lfloor -sen^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta \right\rfloor$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0.48\left(2\cos^2\theta + \cos^2\theta - 1\right) si\ \frac{dV}{d\theta} = 0 \Rightarrow 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = Arc\cos\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}(v.c.)\ en\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{-12sen\theta(4\cos\theta+1)}{25} \Rightarrow sust\ v.c. \Rightarrow \frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{-12sen(\frac{\pi}{3})(4\cos(\frac{\pi}{3})+1)}{25} = \frac{-18\sqrt{3}}{25} < 0$$

$$\Rightarrow \exists máximo\ en\ \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$b.)\ V\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(0.16+0.16\ \cos\frac{\pi}{3}\right)sen\frac{\pi}{3} \cong 0.623m^3 \cong 623\ lt.$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

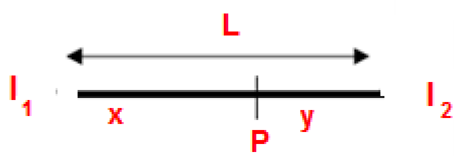
61) Determine los valores de a y b en la ecuación $y = ax^{\frac{4}{3}} + bx^{\frac{1}{3}}$ si la gráfica correspondiente presenta un punto de inflexión en $\left(2,\ 6\sqrt[3]{2}\right)$.

$$y' = \frac{4}{3}ax^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}bx^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow y'' = \frac{4}{9}ax^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}bx^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}(2ax - b) = \frac{2(2ax - b)}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

La ecuación dada de la curva puede escribirse como: $y = x^{\frac{1}{3}}(ax + b) = \sqrt[3]{x}(ax + b)$. Como el punto satisface la ecuación la ecuación de la curva, se tiene, $\sqrt[3]{2}(2a + b) = 6\sqrt[3]{2} \quad \Rightarrow \quad 2a + b = 6.$

Como la gráfica tiene un punto de inflexión en el punto dado, en $x = 2,\ y'' = 0,$ es decir, *4a - b = 0.* Resolviendo el sistema planteado, sigue: *a = 1, b = 4.*

62) La intensidad de iluminación E en luz que produce un foco luminoso puntual en cualquier punto es directamente proporcional a la intensidad del foco I en candelas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia d al foco expresada en metros. $E = \frac{K.I}{d^2}$ Si dos focos luminosos se encuentran a una distancia L y tienen intensidades I_1 e I_2. Halla el punto del segmento que los une donde la iluminación sea mínima. Se supondrá que la iluminación en cualquier punto es la suma de las iluminaciones producidas por cada foco.



$$E = \frac{KI_1}{x^2} + \frac{KI_2}{y^2} \Rightarrow E = K\left(\frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{y^2}\right) \Rightarrow \frac{dE}{dx} = k\left(\frac{-2I_1}{x^3} + \frac{-2I_2}{y^3}\ (\frac{dy}{dx})\right)$$

$$además: L = x + y \Rightarrow y = L - x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 2k\left(-\frac{I_1}{x^3} + \frac{I_2}{y^3}\right)$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$si: \frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow \left(\frac{-I_1}{x^3} + \frac{I_2}{y^3} \right) = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{I_2}{I_1} y^3 \Rightarrow x = y\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}} \Rightarrow x = (L-x)\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}$$

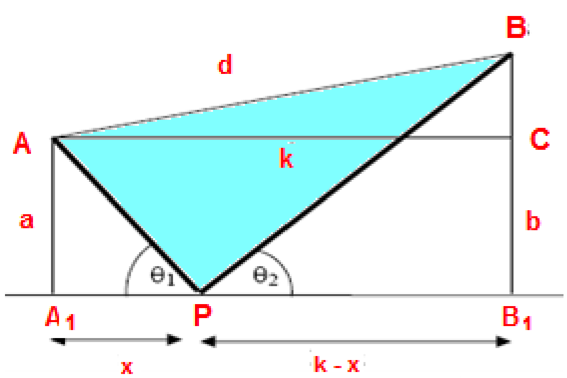
$$x = \frac{\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}}{1+\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}} L; \; Como \; \frac{\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}}{1+\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}} < 1 \; el \; valor \; de \; x \; hallado \; corresponde \; a \; un \; mínimo.$$

63) Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determine a, b, c y d si se sabe que la gráfica de f tiene un mínimo relativo en (2,-1) y un punto de inflexión en (1,1).

$f´(x) = 3ax^2 + 2bx + c \;\; \Rightarrow \;\; f''(x) = 6ax + 2b$. Como los puntos dados satisfacen la ecuación de la curva, entonces, se tienen las ecuaciones; $8a + 4b + 2c + d = -1, \; a + b + c + d = 1$

La existencia de un extremo relativo en (2, -1) implica que: $12a + 4b + c = 0$. De igual manera la existencia de un punto de inflexión en (1,1) los lleva a: $6a + 2b = 3a + b = 0$, el sistema conformado por estas ecuaciones admite la solución: *a = 1, b = -3, c = 0, d = 3.*

64) Dos tanques A y B situados entre si a una distancia de d Km. se encuentran ubicados a un mismo lado de la orilla rectilínea de un río y a una distancia de este de a Km y b Km respectivamente. Se desea ubicar sobre la orilla una bomba para alimentar de agua a los tanques mediante tuberías rectilíneas PA y PB. Demuestra que la longitud de tubería será mínima cuando se cumpla que: $\theta_1 = \theta_2$ (Admite que el punto crítico que encontraras corresponde a un mínimo)



damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$Sea: L_{total} \;\; la\ longitud\ total \; \Rightarrow L_{total} = PA + PB$$

$$De\ la\ fig.\ del\ \measuredangle\ AA_1P: d_{AP} = \sqrt{x^2 + a^2}; \quad \cos\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow x = \cos\theta_1\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$Del\ \measuredangle\ BB_1P\ d_{BP} = \sqrt{(k-x)^2 + b^2}; \quad \cos\theta_2 = \frac{(k-x)}{\sqrt{(k-x)^2 + b^2}} \Rightarrow (k-x) = \cos\theta_2\sqrt{(k-x)^2 + b^2}$$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(k-x)^2 + b^2};\ para:\ 0 \le x \le k \Rightarrow \frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{(k-x)-1}{\sqrt{(k-x)^2 + b^2}}$$

$$sust.\ los\ \ valores: \frac{dL}{dx} = \cos\theta_1 - \cos\theta_2 \;\; \Rightarrow si: \frac{dL}{dx} = 0 \Rightarrow \cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 0 \Rightarrow \cos\theta_1 = \cos\theta_2$$

$$Como\ \ \theta_1\ \ y\ \ \theta_2 \le \frac{\pi}{2} \;\; \Rightarrow la\ igualdad\ \ implica:\ \ \theta_1 = \theta_2.$$

65) De un ejemplo de una función que tenga infinitos extremos relativos e infinitos puntos de inflexión a lo largo de todo su dominio. Explique.

Consideremos $f(x) = sen\ x$, cuyo dominio es R. En tal caso, $f´(x) = \cos x \;\; \Rightarrow \;\; f´(x) = 0, \;\; \cos x = 0.$ Así, los números críticos son:

$x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \cdots.$ Estos números críticos pueden escribirse en forma general como: $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2},\ n \in Z.$ Ahora bien, el entero n puede ser par o impar. **Si *n* es par,** $n = 2k,\ k \in Z,$ entonces $x = (4k + 1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z.$ **Si *n* es impar,** $n = 2k + 1,\ k \in Z,\ x = (4k + 3)\frac{\pi}{2},\ k \in Z.$

Es decir, se tienen 2 tipos de números críticos dados por las dos últimas expresiones, con las cuales vamos a estudiar la posibilidad de existencia de extremos relativos usando el criterio de la primera derivada.

Para estudiar los signos de la primera derivada a la izquierda y a la derecha de los números críticos se siguió el siguiente proceso: En la región $x < (4k + 1)\frac{\pi}{2}$, se tomó $x = 2k\pi$, para tener $\cos(2k\pi) = 1 > 0.$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

En $(4k+1)\frac{\pi}{2} < x < (4k+3)\frac{\pi}{2}$, se tomó $x = (2k+1)\pi$, con lo cual, $\cos(2k+1)\pi = -1 < 0.$

En $x > (4k+3)\frac{\pi}{2}$, se tomó $x = 2(k+1)\pi$, de lo cual, $\cos 2(k+1)\pi = 1 > 0.$

Al evaluar la función en $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$ y $x = (4k+3)\frac{\pi}{2}$, se tiene, respectivamente, $sen(4k+1)\frac{\pi}{2} = 1$ y $sen(4k+3)\frac{\pi}{2} = -1.$

Este análisis permitió conformar la siguiente tabla resumen, donde efectivamente se muestra la existencia de infinitos extremos relativos.

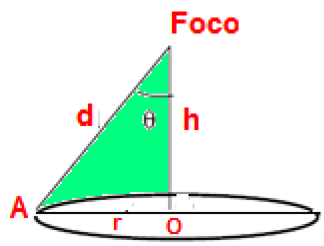
Intervalos	**f**	**f´(x)**	**Conclusión**
$x < (4k+1)\frac{\pi}{2}$		+	f es creciente
$x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right) = 1$		Máx. $f\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}, 1\right)$
$(4k+1)\frac{\pi}{2} < x < (4k+3)\frac{\pi}{2}$		-	f es decreciente
$x = (4k+3)\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{(4k+3)\pi}{2}\right) = -1$		Mín. $f\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}, -1\right)$
$x > (4k+3)\frac{\pi}{2}$		+	f es creciente

Por otro lado, $f''(x) = -sen\,x \Rightarrow f''(x) = 0,\ sen\ x = 0.$ De aquí, los posibles puntos de inflexión son: $x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \cdots.$ en general se pueden escribir como: $x = n\pi,\ n \in Z.$ De esta forma podemos conformar la tabla siguiente que muestra la existencia de infinitos puntos de inflexión.

Intervalos	**f**	**F”**	**Conclusión**
$x < n\pi$		-	f es cóncava hacia abajo
$x = n\pi$	$f(n\pi) = 0$		P.I. $(n\pi, 0)$
$x > n\pi$		+	f es cóncava hacia arriba

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

66) Se desea iluminar un estanque de sección circular de radio R mediante una lámpara de altura ajustable colocada sobre la vertical que pasa por el centro de aquél. La iluminación en el borde del estanque, que es la zona de menor iluminación de la superficie, esta expresada por la relación: $E = \frac{I.\cos\theta}{d_2}$ Donde E es la iluminación expresada en luz, I la intensidad del foco luminoso supuesto puntual, expresada en candelas y θ al ángulo indicado en la figura. Verifica que existe un valor de θ para el cual la iluminación E es máxima y determina la altura a la que debe colocarse la lámpara para obtenerla.



$$E = \frac{I\ \cos\theta}{d^2}$$

$$Del \measuredangle\ AOF\ de\ la\ fig.\ d = \frac{r}{sen\theta} \Rightarrow sust.\ E(\theta) = \frac{I\cos\theta sen^2\theta}{r^2};\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{I}{r^2}\left(-sen^3\theta\ +\ 2sen\theta\ \cos^2\theta\right) \Rightarrow \frac{dE}{d\theta} = \frac{Isen\theta}{r^2}\left(-sen^2\theta + 2\cos^2\theta\right) \Rightarrow \frac{dE}{d\theta} = \frac{Isen\theta}{r^2}\left(2 - 3sen^2\theta\right)$$

$$sen\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0(v.c);\quad 2 - 3sen^2\theta = 0 \Rightarrow sen^2\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta\ =\ Arcsen\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \theta_o \cong 0.95\ rad \cong 54,5^o$$

$$Del \measuredangle\ AOF\ de\ la\ fig.\ h = \frac{r}{tg\theta} \Rightarrow h = \frac{r}{tg\theta_o} \cong \frac{2}{tg0.95} \cong 1,41\ m$$

67) Pruebe que la curva $y = \frac{4x}{x^2+4}$ tiene tres puntos de inflexión y que estos se encuentran sobre una misma recta.

$$y' = \frac{4(x^2+4) - 4x(2x)}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow y' = \frac{4\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$y'' = (4)\left[\frac{-2x\left(x^2+4\right)^2 - 2\left(x^2+4\right)2x.\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^2}\right] = (4)\left[\frac{-2x\left(x^2+4\right)\left[\left(x^2+4\right) + 2\left(4-x^2\right)\right]}{\left(x^2+4\right)^2}\right]$$

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.

$$y''=\frac{-8x\left(12-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^3}=\frac{8x\left(x^2-12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}\Rightarrow y''=\frac{8x\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$$

Calculemos los posibles puntos de inflexión, la única alternativa surge de y" = 0, esto es: $x\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right)=0 \;\Rightarrow\; x=0,\;\; x=\pm 2\sqrt{3}.$

Intervalos	**f**	**f"(x)**	**Conclusión**
$x<-2\sqrt{3}$		$-$	f es cóncava hacia abajo
$x=-2\sqrt{3}$	$f\left(-2\sqrt{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$		P.I. $\left(-2\sqrt{3},\ \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$-2\sqrt{3}<x<0$		$+$	F es cóncava hacia arriba
$x=0$	$f(0)=0$		P.I. (0,0)
$0<x<2\sqrt{3}$		$-$	f es cóncava hacia abajo
$x=2\sqrt{3}$	$f\left(2\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$		P.I. $\left(2\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$x>2\sqrt{3}$		$+$	f es cóncava hacia arriba

De acá se desprende, obviamente, que la curva tiene 3 puntos de inflexión; probemos que estos se encuentran sobre una misma recta, para ello, utilizamos el cálculo de dependientes tomando los puntos dos a dos, es decir:

$$m=\frac{0-\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)}{0-\left(-2\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{4};\; m=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}{2\sqrt{3}-0}=\frac{1}{4};\; m=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)}{2\sqrt{3}-\left(-2\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{4}.$$

Estos últimos cálculos corroboran que los 3 puntos están sobre una misma recta.

DÁMASO ROJAS
MARZO 2008

damasorojas8@gmail.com, damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com.